

Основная теорема арифметики

Содержание

1	Всероссийская олимпиада школьников по математике	1
2	Московская математическая олимпиада	3
3	Олимпиада им. Леонарда Эйлера	3
4	Турнир городов	3
5	«Покори Воробьёвы горы!»	4
6	«Ломоносов»	4
7	«Высшая проба»	4
8	ОММО	5

1 Всероссийская олимпиада школьников по математике

1.1. (*Всеросс., 2019, ШЭ, 11.1*) Докажите, что уравнение $x^2 + 2^{2018}x + 2^{2019} = 0$ не имеет целых корней.

1.2. (*Всеросс., 2016, ШЭ, 11.2*) Найдите какую-нибудь пару натуральных чисел a и b , оба больших 1, удовлетворяющих уравнению $a^{13} \cdot b^{31} = 6^{2015}$.

1.3. (*Всеросс., 2016, МЭ, 8.1*) Натуральное число n называется «хорошим», если после приписывания его справа к любому натуральному числу получается число, делящееся на n . Запишите десять «хороших» чисел, которые меньше, чем 1000. (*Достаточно привести ответ.*)

1.4. (*Всеросс., 2018, МЭ, 9.4*) Назовем натуральное число интересным, если его можно разложить на натуральные множители, каждый из которых меньше, чем 30. Докажите, что из 10 000 интересных чисел всегда можно выбрать два, произведение которых является точным квадратом.

1.5. (*Всеросс., 2003, ОЭ, 8.1*) Числа от 1 до 10 разбили на две группы так, что произведение чисел в первой группе нацело делится на произведение чисел во второй. Какое наименьшее значение может быть у частного от деления первого произведения на второе?

1.6. (*Всеросс., 1996, ОЭ, 9.5, 10.5*) Найдите все натуральные числа, имеющие ровно шесть делителей, сумма которых равна 3500.

1.7. (*Всеросс., 1995, ОЭ, 9.2*) Можно ли расставить по кругу 1995 различных натуральных чисел так, чтобы для любых двух соседних чисел отношение большего из них к меньшему было простым числом?

1.8. (*Всеросс., 2001, ОЭ, 9.6*) Существует ли такое натуральное число, что произведение всех его натуральных делителей (включая 1 и само число) оканчивается ровно на 2001 ноль?

1.9. (*Всеросс., 2000, ОЭ, 10.1*) Рассматриваются 2000 чисел: 11, 101, 1001, Докажите, что среди этих чисел не менее 99% составных.

1.10. (*Всеросс., 2007, ОЭ, 9.7*) Бесконечная возрастающая арифметическая прогрессия, состоящая из натуральных чисел, содержит точный куб натурального числа. Докажите, что она содержит и точный куб, не являющийся точным квадратом.

1.11. (*Всеросс., 1999, ОЭ, 9.7*) Докажите, что каждое натуральное число является разностью двух натуральных чисел, имеющих одинаковое количество простых делителей. (Каждый простой делитель учитывается один раз, например, число 12 имеет два простых делителя: 2 и 3.)

1.12. (*Всеросс., 2017, РЭ, 10.7*) Изначально на доске записаны несколько натуральных чисел (больше одного). Затем каждую минуту на доску дописывается число, равное сумме квадратов всех уже записанных на ней чисел (так, если бы на доске изначально были записаны числа 1, 2, 2, то на первой минуте было бы дописано число $1^2 + 2^2 + 2^2$). Докажите, что сотое дописанное число имеет хотя бы 100 различных простых делителей.

1.13. (*Всеросс., 1999, ЗЭ, 9.4*) Числа от 1 до 1000000 покрашены в два цвета — чёрный и белый. За ход разрешается выбрать любое число от 1 до 1000000 и перекрасить его и все числа, не взаимно простые с ним, в противоположный цвет. Вначале все числа были чёрными. Можно ли за несколько ходов добиться того, что все числа станут белыми?

1.14. (*Всеросс., 2015, РЭ, 11.2*) На новогодний вечер пришли несколько супружеских пар, у каждой из которых было от 1 до 10 детей. Дед Мороз выбирал одного ребёнка, одну маму и одного папу из трёх разных семей и катал их в санях. Оказалось, что у него было ровно 3630 способов выбрать нужную тройку людей. Сколько всего могло быть детей на этом вечере?

1.15. (*Всеросс., 1995, ЗЭ, 11.1*) Могут ли все числа 1, 2, 3, ..., 100 быть членами 12 геометрических прогрессий?

1.16. (*Всеросс., 2010, РЭ, 10.4*) Натуральное число b назовём *удачным*, если для любого натурального a , такого, что a^5 делится на b^2 , число a^2 делится на b . Найдите количество удачных натуральных чисел, меньших 2010.

1.17. (*Всеросс., 2011, ЗЭ, 10.7*) Для натуральных чисел $a > b > 1$ определим последовательность x_1, x_2, \dots формулой

$$x_n = \frac{a^n - 1}{b^n - 1}.$$

Найдите наименьшее d , при котором ни при каких a и b эта последовательность не содержит d последовательных членов, являющихся простыми числами.

1.18. (*Всеросс., 2013, ЗЭ, 10.3*) Найдите все такие натуральные k , что произведение первых k простых чисел, уменьшенное на 1, является точной степенью натурального числа (большей, чем первая).

1.19. (*Всеросс., 2001, ЗЭ, 9.8*) Найдите все нечётные натуральные n ($n > 1$) такие, что для любых взаимно простых делителей a и b числа n число $a + b - 1$ также является делителем n .

1.20. (*Всеросс., 2001, ЗЭ, 10.8*) Найдите все натуральные числа n такие, что для любых взаимно простых делителей a и b числа n число $a + b - 1$ также является делителем n .

1.21. (*Всеросс., 2011, ЗЭ, 11.7*) Для натурального a обозначим через $P(a)$ наибольший простой делитель числа $a^2 + 1$. Докажите, что существует бесконечно много таких троек различных натуральных чисел a, b, c , что $P(a) = P(b) = P(c)$.

1.22. (*Всеросс., 2002, ЗЭ, 11.8*) Докажите, что существует бесконечно много натуральных n , для которых числитель несократимой дроби, равной $1 + 1/2 + \dots + 1/n$, не является степенью простого числа с натуральным показателем.

2 Московская математическая олимпиада

2.1. (*ММО, 1994, 9.5*) Найдите наибольшее натуральное число, не оканчивающееся нулем, которое при вычеркивании одной (не первой) цифры уменьшается в целое число раз.

2.2. (*ММО, 2009, 10.1*) Через терминал оплаты на мобильный телефон можно перевести деньги, при этом взимается комиссия — натуральное число процентов. Федя положил целое количество рублей на мобильный телефон, и его счёт пополнился на 847 рублей. Сколько денег положил на счёт Федя, если известно, что комиссия менее 30%?

2.3. (*ММО, 2007, 11.3*) Каким может быть произведение нескольких различных простых чисел, если оно кратно каждому из них, уменьшенному на 1? Найдите все возможные значения этого произведения.

2.4. (*ММО, 2003, 11.7*) Дано равенство

$$(a^{m_1} - 1) \dots (a^{m_n} - 1) = (a^{k_1} + 1) \dots (a^{k_l} + 1),$$

где a, n, l и все показатели степени — натуральные числа, причём $a > 1$. Найдите все возможные значения числа a .

3 Олимпиада им. Леонарда Эйлера

3.1. (*Олимпиада Эйлера, РЭ, 2010.4*) Даны натуральные числа a и b , причём $a < 1000$. Докажите, что если a^{21} делится на b^{10} , то a^2 делится на b .

3.2. (*Олимпиада Эйлера, ЗЭ, 2011.7*) По окружности записали красным пять несократимых дробей с нечётными знаменателями, большими 10^{10} . Между каждыми двумя соседними красными дробями вписали синим несократимую запись их суммы. Могло ли случиться, что у синих дробей все знаменатели меньше 100?

4 Турнир городов

4.1. (*Турнир городов, 2016, 8–9.3, 10–11.2*) Существуют ли 2016 целых чисел, сумма и произведение которых равны 2016?

4.2. (*Турнир городов, 2013, 8–9.2*) Пусть $C(n)$ — количество различных простых делителей числа n . (Например, $C(10) = 2$, $C(11) = 1$, $C(12) = 2$.) Конечно или бесконечно число таких пар натуральных чисел (a, b) , что $a \neq b$ и $C(a + b) = C(a) + C(b)$?

4.3. (*Турнир городов, 1992, 10–11.1*) Докажите, что произведение всех целых чисел от $2^{1917} + 1$ до $2^{1991} - 1$ включительно не есть квадрат целого числа.

4.4. (*Турнир городов, 2013, 10–11.4*) Пусть $C(n)$ — количество различных простых делителей числа n .

а) Конечно или бесконечно число таких пар натуральных чисел (a, b) , что $a \neq b$ и

$$C(a + b) = C(a) + C(b)?$$

б) А если при этом дополнительно требуется, чтобы $C(a + b) > 1000$?

4.5. (*Турнир городов, 1984, 7–8.5*) Докажите, что существует бесконечное число пар таких соседних натуральных чисел, что разложение каждого из них содержит любой простой сомножитель не менее чем во второй степени. Примеры таких пар чисел: $(8, 9)$; $(288, 289)$.

5 «Покори Воробьёвы горы!»

5.1. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 7–8.4*) Коробка с сахаром имеет форму прямоугольного параллелепипеда. В ней находится 280 кусочков сахара, каждый из которых — кубик размером $1 \times 1 \times 1$ см. Найдите площадь полной поверхности коробки, если известно, что длина каждой из её сторон меньше 10 см.

262

6 «Ломоносов»

6.1. (*«Ломоносов», 2017, 7–8.6, 9.4*) Про натуральные числа m и n известно, что $3n^3 = 5m^2$. Найдите наименьшее возможное значение $m + n$.

7 «Высшая проба»

7.1. (*«Высшая проба», 2017, 7.3, 8.1*) Найти все натуральные числа n от 1 до 100 такие, что если перемножить все делители числа n (включая 1 и n), получим число n^3 .

7.2. (*«Высшая проба», 2017, 9.2*) Найдите все натуральные числа n от 400 до 600 такие, что если перемножить все делители числа n (включая 1 и n), получим число n^5 .

7.3. (*«Высшая проба», 2017, 10.3, 11.4*) Тройка целых чисел (x, y, z) , наибольший общий делитель которых равен 1, является решением уравнения

$$y^2z + yz^2 = x^3 + x^2z - 2xz^2.$$

Докажите, что z является кубом целого числа.

8 ОММО

8.1. (ОММО, 2016.3) При каких натуральных $n > 1$ найдутся n подряд идущих натуральных чисел, сумма которых равна 2016?

8.2. (ОММО, 2016.3) На доске написано несколько (больше одного) последовательных натуральных чисел, сумма которых равна 2016. Чему может равняться наименьшее из этих чисел?