

## Логарифмические неравенства

1. (МГУ, физический ф-т, 2004) Решите неравенство

$$\log_5(2+x)(x-5) > \log_{25}(x-5)^2.$$

$$(\infty+;5) \cap (5-;\infty-)$$

2. (МГУ, физический ф-т, 2007) Решите неравенство

$$\log_4(x^2-4)^2 + \log_2 \frac{x-1}{x^2-4} > 0.$$

$$(\infty+;7) \cap (0;7-)$$

3. (МГУ, ф-т почвоведения, 2004) Решите неравенство

$$\log_{0,1}(10^x-9) \geq x-1.$$

$$[1;6^{\frac{1}{3}}]$$

4. (МГУ, физический ф-т, 2003) Решите неравенство

$$\log_{25}(5^x-1) \cdot \log_5(5^{x+2}-25) < 4.$$

$$(\log_5 9; \log_5 9) \cup (\log_5 9; \log_5 25)$$

5. (МГУ, ф-т почвоведения, 2007) Решите неравенство

$$\log_x^3 16 + 2 \log_x^2 16^2 + 4 \log_x 16^4 \geq 0.$$

$$(\infty+;1) \cap \left\{ \frac{4}{3} \right\}$$

6. (МГУ, ИСАА, 2007) Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}} \left( \log_4 \frac{x^2-2x}{x+10} \right) \geq 0.$$

$$[0;5) \cap (2-;7-]$$

7. (МГУ, ф-т гос. управления, 2007) Решите неравенство

$$\sqrt{\log_4^2 x - 2} \geq \log_2 \frac{x}{4} - 1.$$

$$\left[ \frac{4}{3}; 9 \right] \cup \left[ \frac{1}{2}; 1 \right] \cap \left[ \frac{1}{2}; 1 \right] \cup \left[ \frac{1}{2}; 1 \right]$$

8. (МГУ, ф-т почвоведения, 2006) Решите неравенство

$$(3\sqrt{x})^{\log_2 x} \geq 1.$$

$$(\infty+;1] \cap [\frac{9}{1};0)$$

9. (МГУ, филологический ф-т, 2005) Решите неравенство

$$\log_2(x+1) > \log_{x+1} 16.$$

$$(\infty+;8) \cap (0;\frac{7}{8}-)$$

10. (МГУ, ф-т почвоведения, 2002) Решите неравенство

$$\log_{25} \log_4 4x \geq \log_5 \log_8 x.$$

$$[\frac{7}{9};1)$$

11. (МГУ, ВМК, 2005) Решите неравенство

$$6 \log_{2x} x + 2 \log_{4\sqrt{x}}(2x) \geq 1.$$

$$(\infty+;1] \cap (\frac{7}{1};\frac{8}{1}] \cap (\frac{9}{1};0)$$

12. (МГУ, мехмат, 2000-05.1) Решить неравенство

$$\log_{4x^2} x^2 \cdot \log_{8x^4} x^4 \leq 1.$$

$$(\infty+; \frac{1}{8}-) \cap (\frac{7}{8}-; \frac{7}{1}) \cap (\frac{7}{1}-; \frac{7}{8}-) \cap [\frac{1}{8}-; \infty-)$$

13. (МГУ, мехмат, 2002-07.1) Решите неравенство

$$\log_{\frac{2}{3}} \frac{x}{x+1} + \log_{\frac{1}{2}} \frac{x+1}{3x} \geq 2.$$

$$[7;0)$$

14. («Покори Воробьёвы горы!», 2013) Решите неравенство

$$3 + 2 \cdot 4^{\log_x 7} - 2^{\log_{\sqrt{x}} 49} \geq 0.$$

$$(\infty+; \frac{1}{7} \log_{10} 4] \cap (1;0)$$

15. («Физтех», 2017) Решите неравенство

$$x^{\log_3 x} - 2 \leq \left(\sqrt[3]{3}\right)^{\log_{\sqrt{3}}^2 x} - 2 \cdot x^{\log_3 \sqrt[3]{x}}.$$

$$(\infty+; \frac{1}{2} \log_{10} \wedge \frac{1}{8}] \cap \{1\} \cap [\frac{1}{2} \log_{10} \wedge - \frac{1}{8}; 0)$$

16. («Физтех», 2017) Решите неравенство

$$\log_9 4 + (16 - \log_3^2 2) \log_{162} 3 \leq 64^{\log_4^2 x} - 15 \cdot x^{\log_4 x}.$$

$$(\infty+; \frac{1}{4}] \cap [\frac{1}{4}; 0)$$

17. («Физтех», 2020, 11) Решите неравенство

$$27\sqrt{\log_3 x} - 11 \cdot 3\sqrt{4\log_3 x} + 40 \cdot x\sqrt{\log_x 3} \leq 48.$$

$$\{\frac{1}{3} \leq \log_3 x \leq \frac{1}{2}\} \cap [\frac{1}{3}; 1) \ni x$$

18. («Физтех», 2015) Решите неравенство

$$\frac{\log_3 x^4 \cdot \log_{\frac{1}{3}} x^2 + \log_3 x^2 - \log_{\frac{1}{3}} x^4 + 2}{\left(\log_{\frac{1}{3}} x^2\right)^3 + 64} \leq 0.$$

$$(6; 8] \cap \left[\frac{8}{3}; 0\right) \cap \left(0; \frac{8}{3} - \right] \cap [8; 6-)$$

19. («Физтех», 2012) Решите неравенство

$$\frac{1}{2} \log_2 \left( \frac{x^2}{2} + 8x + 33 \right) \leq -\log_{\frac{1}{4}} (x^2 + 13x + 42) + \log_4 \left( \frac{x-1}{x+7} \right).$$

$$(\infty+; \frac{1}{2} \log_2 8 + \frac{1}{2}) \cap (\frac{1}{2}; \infty-)$$

20. (МГУ, мехмат, 2001-03.2) Решить неравенство

$$\frac{\log_{(21+4x-x^2)}(7-x)}{\log_{(x+3)}(21+4x-x^2)} < \frac{1}{4}.$$

$$\left( \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \log_2 7 + \frac{1}{2} \right) \cap \left( \frac{1}{2} \log_2 7 + \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right) \cap \left( \frac{1}{2}; \frac{1}{2} - \right) \cap \left( \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \log_2 7 - \frac{1}{2} \right) \cap \left( \frac{1}{2} \log_2 7 - \frac{1}{2}; \frac{1}{2} - \right)$$

21. (МГУ, мехмат, 2001-07.1) Решить неравенство

$$x \geq \log_2 (101 \cdot 10^x - 10^{2+2x}) - \log_5 (101 \cdot 2^x - 5^{2+x} \cdot 2^{2+2x}).$$

$$(\frac{1}{2} - \log_2 101; \frac{1}{2}; 0] \cap [\frac{1}{2}; \infty-)$$

22. (МГУ, мехмат, 2002-03.1) Решить неравенство

$$\log_{\sqrt{2}} (6 - x - x^2) + \log_2 (x^2 - 2x + 1) + 2 > 2 \log_4 (x^2 - 4x + 3)^2.$$

$$\left( \frac{1}{2} \log_2 6 + \frac{1}{2}; 1 \right) \cap \left( 1; \frac{1}{2} \log_2 6 - \frac{1}{2} \right)$$

## Метод рационализации

Метод изложен в [соответствующей статье](#).

23. («Покори Воробьёвы горы!», 2014) Решите неравенство

$$\log_{\frac{4-x^2}{3}} \frac{2}{3x^2+x} \geq -1.$$

$$(\mathbb{Z}^+ \cap [\frac{11}{8}; 0) \cap (\frac{8}{1} - ; \mathbb{I}^-) \cap (\mathbb{I}^- ; \mathbb{Z}^-)$$

24. («Физтех», 2008) Решите неравенство

$$\log_{\frac{x+5}{x+1}}(x+25) \leq 2.$$

$$[0; \mathbb{I}^-) \cap (\mathbb{E}^- ; \mathbb{Z}^{\wedge} 8 - \mathbb{E} \mathbb{I}^-]$$

25. («Физтех», 2009) Решите неравенство

$$\log_{|x-1|}(\sqrt{6-x}+4) \geq 2 \log_{(x-1)^2}(10-2x).$$

$$(\mathbb{E}^+ ; \mathbb{Z}) \cap (\mathbb{Z}^+ \mathbb{I}) \cap (\mathbb{I}^+ ; 0)$$

26. («Физтех», 2010) Решите неравенство

$$\log_{x+1} \left( \sqrt{x+4} + \frac{3}{4} \right) \leq 1.$$

$$(\infty^+ ; \frac{7}{6}] \cap (0; \mathbb{I}^-)$$

27. («Физтех», 2011) Решите неравенство

$$\frac{2}{\log_{x+\frac{5}{8}}(\frac{1}{2}-x)} \leq 1.$$

$$(\frac{7}{1} ; \frac{8}{8}) \cap (\frac{8}{8} ; \frac{8}{2\mathbb{Z}^{\wedge} 6+6-}] \cap (\frac{7}{1} - ; \frac{8}{8}^-)$$

28. («Физтех», 2016) Решите неравенство

$$\log_{\frac{x^2-3}{6x-12}} \frac{(x^2-3)(6x-12)}{25} \geq 1.$$

$$(\infty^+ ; \mathbb{E}) \cap (\mathbb{E}^+ ; \frac{9}{2\mathbb{I}}] \cap (\mathbb{E}^{\wedge} \frac{9}{2}]$$

29. (МГУ, ДВИ, 2014.3) Найдите все положительные  $x$ , удовлетворяющие неравенству

$$x^{3x+7} > x^{12}.$$

$$(\infty^+ ; \frac{8}{2}) \cap (\mathbb{I}^+ ; 0) \ni x$$

30. («Физтех», 2016) Решите неравенство

$$(x^2 - 3x + 3)^{4x^3 + 5x^2} \leq (x^2 - 3x + 3)^{2x^3 + 18x}.$$

$$\{\mathbb{Z}\} \cap [1; 0] \cap \left[\frac{2}{6}; +\infty\right)$$

31. («Ломоносов», 2013) Решить неравенство

$$\log_{x^2 + 4x + 3}(x - 4)^2 \cdot \log_{-x^2 + 3x + 4}(3 - x)^3 \leq 0.$$

$$\{\mathbb{R}; \mathbb{Z}\} \cap \left(\mathbb{Z}^{\wedge} + \mathbb{Z}^{-}; \frac{\mathbb{Z}}{1\mathbb{Z}^{\wedge} - \mathbb{Z}}\right)$$

32. («Ломоносов», 2011) Решите неравенство

$$\log_5(5x^2 + 2x) \cdot \log_5\left(5 + \frac{2}{x}\right) > \log_5 5x^2.$$

$$\left(\infty + ; \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}^{\wedge} + 1 -}\right) \cap \left(\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}} - ; \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}^{\wedge} - 1 -}\right)$$

33. (МГУ, мехмат, 2004-03.2) Решите неравенство

$$3^{\log_x(3x^2 + 2x - 1)} \leq (x^2 + x)^{\log_x 9}.$$

$$(\infty; 1) \cap (1; 1 - \mathbb{Z}^{\wedge}]$$

34. («Покори Воробьёвы горы!», 2017) Решите неравенство

$$(\pi - 3)^{\ln(x^2 - 2x)} \leq (2 - x)^{\ln(\pi - 3)}.$$

$$[1 - ; \infty -)$$

35. («Покори Воробьёвы горы!», 2014) Решите неравенство

$$(\log_5 x)^{\log_3 \log_2 x} + (\log_2 x)^{\log_3 \log_5 x} > 2.$$

$$(\infty + ; 5) \cap (\mathbb{Z}; 1)$$

36. («Физтех», 2013) Решите неравенство

$$\left(\frac{6|2x + 1|}{4x^2 + 15}\right)^{-x + \sqrt{x^2 - 1}} > 1.$$

$$(\infty + ; \frac{\mathbb{Z}}{6}) \cap (\frac{\mathbb{Z}}{6}; 1)$$

37. («Покори Воробьёвы горы!», 2016) Решите неравенство

$$\log_{3x}(x + 1) - (x + 1)^{(\log_{\cos 5} \sqrt{x+1})^{-1}} < \sin^2 5.$$

$$(\infty + ; \frac{\mathbb{Z}}{1}) \cap (\frac{\mathbb{Z}}{1}; 0)$$

38. («Покори Воробьёвы горы!», 2010) Решите неравенство

$$\log_{x^2 + \frac{1}{x^2}} \left( x - \frac{1}{x} \right) > \log_{x + \frac{1}{x}} \left( x - \frac{1}{x} \right).$$

$$\left( \frac{x}{x^2 + 1} ; 1 \right)$$

39. («Физтех», 2019, 11) Решите неравенство

$$\left( \log_{\frac{3}{2}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{5}{6}} (1 + 4x^2) \cdot \log_{\frac{3}{2}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{5}{6}} (1 - 4x^2) + 1 \right) \log_{1-16x^4} \left( \frac{3x^2}{2} - \frac{4}{3}x + \frac{5}{6} \right) \geq 1.$$

$$\left[ \frac{x}{1} ; 0 \right) \cap \left( 0 ; \frac{11}{1} - \right] \cap \left( \frac{6}{1} - ; \frac{9}{1} - \right) \cap \left[ \frac{x}{1} - ; \frac{7}{1} - \right) \ni x$$

40. («Физтех», 2019, 11) Решите неравенство

$$\log_{1+x^2} (1 + 27x^5) + \log_{1-2x^2+27x^4} (1 + x^2) \leq 1 + \log_{1-2x^2+27x^4} (1 + 27x^5).$$

$$\left\{ \frac{x}{1} \right\} \cap \left( \frac{x^2}{2} \wedge ; 0 \right) \cap \left( 0 ; \frac{x^2}{2} \wedge - \right) \cap \left[ \frac{x}{1} - ; \frac{x^2 \wedge}{1} - \right) \ni x$$

41. (МГУ, мех.мат, 2004-07.1) Решить неравенство

$$\frac{\log_4(2-x) - \log_6(2-x)}{\log_6 x - \log_9 x} \leq \log_4 9.$$

$$\left( \frac{2}{1} ; 1 \right) \cap \left( 1 ; 0 \right)$$