

Логарифмические неравенства

1. (МГУ, физический ф-т, 2004) Решите неравенство

$$\log_5(2+x)(x-5) > \log_{25}(x-5)^2.$$

$$(\infty+;5) \cap (5-\infty-)$$

2. (МГУ, физический ф-т, 2007) Решите неравенство

$$\log_4(x^2-4)^2 + \log_2 \frac{x-1}{x^2-4} > 0.$$

$$(\infty+;2) \cap (0;2-)$$

3. (МГУ, ф-т почвоведения, 2004) Решите неравенство

$$\log_{0,1}(10^x-9) \geq x-1.$$

$$[1;6\overline{3}]$$

4. (МГУ, физический ф-т, 2003) Решите неравенство

$$\log_{25}(5^x-1) \cdot \log_5(5^{x+2}-25) < 4.$$

$$(9\overline{2} \text{ } 9\overline{2}01; \frac{9\overline{2}9}{9\overline{2}9} \text{ } 9\overline{2}01)$$

5. (МГУ, ф-т почвоведения, 2007) Решите неравенство

$$\log_x^3 16 + 2 \log_x^2 16^2 + 4 \log_x 16^4 \geq 0.$$

$$(\infty+;1) \cap \{\frac{4}{1}\}$$

6. (МГУ, ИСАА, 2007) Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}} \left(\log_4 \frac{x^2-2x}{x+10} \right) \geq 0.$$

$$[01;5) \cap (2-;4-]$$

7. (МГУ, ф-т гос. управления, 2007) Решите неравенство

$$\sqrt{\log_4^2 x - 2} \geq \log_2 \frac{x}{4} - 1.$$

$$\left[\frac{8}{1} \wedge 7 \cdot 91; \frac{8}{2} \wedge 7 \right] \cap \left[\frac{8}{2} \wedge -7; 0 \right)$$

8. (МГУ, ф-т почвоведения, 2006) Решите неравенство

$$(3\sqrt{x})^{\log_2 x} \geq 1.$$

$$(\infty+; 1] \cap \left[\frac{9}{1}; 0\right)$$

9. (МГУ, филологический ф-т, 2005) Решите неравенство

$$\log_2(x+1) > \log_{x+1} 16.$$

$$(\infty+; 8) \cap \left(0; \frac{7}{8}-\right)$$

10. (МГУ, ф-т почвоведения, 2002) Решите неравенство

$$\log_{25} \log_4 4x \geq \log_5 \log_8 x.$$

$$[79; 1)$$

11. (МГУ, ВМК, 2005) Решите неравенство

$$6 \log_{2x} x + 2 \log_{4\sqrt{x}}(2x) \geq 1.$$

$$(\infty+; 1] \cap \left(\frac{7}{1}; \frac{8}{1}\right] \cap \left(\frac{9}{1}; 0\right)$$

12. (МГУ, мехмат, 2000-05.1) Решить неравенство

$$\log_{4x^2} x^2 \cdot \log_{8x^4} x^4 \leq 1.$$

$$\left(\infty+; \frac{1}{8}-\right] \cap \left(\frac{7}{8}-; \frac{7}{1}\right) \cap \left(\frac{7}{1}-; \frac{7}{8}-\right) \cap \left[\frac{1}{8}-; \infty-\right)$$

13. (МГУ, мехмат, 2002-07.1) Решите неравенство

$$\log_{\frac{2}{3}} \frac{x}{x+1} + \log_{\frac{1}{2}} \frac{x+1}{3x} \geq 2.$$

$$[7; 0)$$

14. («Покори Воробьёвы горы!», 2013) Решите неравенство

$$3 + 2 \cdot 4^{\log_x 7} - 2^{\log_{\sqrt{x}} 49} \geq 0.$$

$$(\infty+; \frac{1}{7} \varepsilon_{801} 4] \cap (1; 0)$$

15. («Физтех», 2017) Решите неравенство

$$x^{\log_3 x} - 2 \leq \left(\sqrt[3]{3}\right)^{\log_{\sqrt{3}}^2 x} - 2 \cdot x^{\log_3 \sqrt[3]{x}}.$$

$$\left(\infty+; \frac{1}{2} \varepsilon_{801} \wedge \varepsilon\right] \cap \{1\} \cap \left[\frac{1}{2} \varepsilon_{801} \wedge -\varepsilon; 0\right)$$

16. («Физтех», 2017) Решите неравенство

$$\log_9 4 + (16 - \log_3^2 2) \log_{162} 3 \leq 64^{\log_4^2 x} - 15 \cdot x^{\log_4 x}.$$

$$(\infty+; \frac{7}{4}] \cap [\frac{7}{4}; 0)$$

17. («Физтех», 2015) Решите неравенство

$$\frac{\log_3 x^4 \cdot \log_{\frac{1}{3}} x^2 + \log_3 x^2 - \log_{\frac{1}{3}} x^4 + 2}{\left(\log_{\frac{1}{3}} x^2\right)^3 + 64} \leq 0.$$

$$(6; \frac{8}{3}] \cap \left[\frac{8}{3}; 0\right) \cap \left(0; \frac{8}{3} - \right] \cap [\frac{8}{3}; 6-)$$

18. («Физтех», 2012) Решите неравенство

$$\frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{x^2}{2} + 8x + 33 \right) \leq -\log_{\frac{1}{4}} (x^2 + 13x + 42) + \log_4 \left(\frac{x-1}{x+7} \right).$$

$$(\infty+; \frac{1}{2} \log_2 8 + \frac{1}{2}] \cap (\frac{1}{2}; \infty-)$$

19. (МГУ, мехмат, 2001-03.2) Решить неравенство

$$\frac{\log_{(21+4x-x^2)}(7-x)}{\log_{(x+3)}(21+4x-x^2)} < \frac{1}{4}.$$

$$\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \log_2 7 + \frac{1}{2} \right) \cap \left(\frac{1}{2} \log_2 7 + \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right) \cap \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \log_2 7 - \frac{1}{2} \right) \cap \left(\frac{1}{2} \log_2 7 - \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right)$$

20. (МГУ, мехмат, 2001-07.1) Решить неравенство

$$x \geq \log_2 (101 \cdot 10^x - 10^{2+2x}) - \log_5 (101 \cdot 2^x - 5^{2+x} \cdot 2^{2+2x}).$$

$$(\frac{1}{2} - \log_2 101; \frac{1}{2}] \cap [\frac{1}{2}; \infty-)$$

21. (МГУ, мехмат, 2002-03.1) Решить неравенство

$$\log_{\sqrt{2}} (6 - x - x^2) + \log_2 (x^2 - 2x + 1) + 2 > 2 \log_4 (x^2 - 4x + 3)^2.$$

$$\left(\frac{1}{2} \log_2 6 + \frac{1}{2}; 1 \right) \cap \left(1; \frac{1}{2} \log_2 6 - \frac{1}{2} \right)$$

Метод рационализации

Метод изложен в [соответствующей статье](#).

22. («Покори Воробьёвы горы!», 2014) Решите неравенство

$$\log_{\frac{4-x^2}{3}} \frac{2}{3x^2+x} \geq -1.$$

$$(\frac{1}{2}; 1) \cap \left[\frac{11}{8}; 0\right) \cap \left(\frac{8}{3}; 1-\right) \cap (1-; \frac{1}{2}-)$$

23. («Физтех», 2008) Решите неравенство

$$\log_{\frac{x+5}{x+1}}(x+25) \leq 2.$$

$$[0; 1-) \cap (9 - \sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{1} -]$$

24. («Физтех», 2009) Решите неравенство

$$\log_{|x-1|}(\sqrt{6-x}+4) \geq 2 \log_{(x-1)^2}(10-2x).$$

$$(\sqrt[3]{2}) \cap (\sqrt[3]{1}) \cap (1; 0)$$

25. («Физтех», 2010) Решите неравенство

$$\log_{x+1} \left(\sqrt{x+4} + \frac{3}{4} \right) \leq 1.$$

$$(\infty + \sqrt[3]{\frac{1}{6}}] \cap (0; 1-)$$

26. («Физтех», 2011) Решите неравенство

$$\frac{2}{\log_{x+\frac{5}{8}} \left(\frac{1}{2} - x \right)} \leq 1.$$

$$\left(\frac{\sqrt[3]{8}}{1} ; \frac{\sqrt[3]{8}}{8} \right) \cap \left(\frac{\sqrt[3]{8}}{8} ; \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{2} + 6} \right) \cap \left(\frac{\sqrt[3]{8}}{1} - ; \frac{\sqrt[3]{8}}{8} - \right)$$

27. («Физтех», 2016) Решите неравенство

$$\log_{\frac{x^2-3}{6x-12}} \frac{(x^2-3)(6x-12)}{25} \geq 1.$$

$$(\infty + \sqrt[3]{9}) \cap \left(\sqrt[3]{\frac{9}{21}} \right) \cap \left(\sqrt[3]{9} \sqrt[3]{\frac{9}{2}} \right)$$

28. (МГУ, ДВИ, 2014.3) Найдите все положительные x , удовлетворяющие неравенству

$$x^{3x+7} > x^{12}.$$

$$(\infty + \sqrt[3]{\frac{9}{2}}) \cap (1; 0) \ni x$$

29. («Физтех», 2016) Решите неравенство

$$(x^2 - 3x + 3)^{4x^3+5x^2} \leq (x^2 - 3x + 3)^{2x^3+18x}.$$

$$\{\sqrt[3]{2}\} \cap [1; 0] \cap \left[\frac{\sqrt[3]{2}}{8} - ; \infty \right)$$

30. («Ломоносов», 2013) Решить неравенство

$$\log_{x^2+4x+3}(x-4)^2 \cdot \log_{-x^2+3x+4}(3-x)^3 \leq 0.$$

$$(\sqrt[3]{2}) \cap \left(\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{2} - ; \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2}} \right)$$

31. («Ломоносов», 2011) Решите неравенство

$$\log_5(5x^2 + 2x) \cdot \log_5\left(5 + \frac{2}{x}\right) > \log_5 5x^2.$$

$$\left(\infty + ; \frac{5}{2\sqrt{\lambda+1}}\right) \cap \left(\frac{5}{2} - ; \frac{5}{2\sqrt{\lambda-1}}\right)$$

32. (МГУ, мехмат, 2004-03.2) Решите неравенство

$$3^{\log_x(3x^2+2x-1)} \leq (x^2 + x)^{\log_x 9}.$$

$$(\infty ; 1) \cap (1 ; 1 - \sqrt{\lambda})$$

33. («Покори Воробьёвы горы!», 2017) Решите неравенство

$$(\pi - 3)^{\ln(x^2-2x)} \leq (2 - x)^{\ln(\pi-3)}.$$

$$[1 - ; \infty -)$$

34. («Покори Воробьёвы горы!», 2014) Решите неравенство

$$(\log_5 x)^{\log_3 \log_2 x} + (\log_2 x)^{\log_3 \log_5 x} > 2.$$

$$(\infty + ; 9) \cap (2 ; 1)$$

35. («Физтех», 2013) Решите неравенство

$$\left(\frac{6|2x+1|}{4x^2+15}\right)^{-x+\sqrt{x^2-1}} > 1.$$

$$(\infty + ; \frac{5}{8}) \cap (\frac{5}{8} ; 1)$$

36. («Покори Воробьёвы горы!», 2016) Решите неравенство

$$\log_{3x}(x+1) - (x+1)^{(\log_{\cos 5} \sqrt{x+1})^{-1}} < \sin^2 5.$$

$$(\infty + ; \frac{5}{1}) \cap (\frac{5}{1} ; 0)$$

37. («Покори Воробьёвы горы!», 2010) Решите неравенство

$$\log_{x^2+\frac{1}{x^2}}\left(x - \frac{1}{x}\right) > \log_{x+\frac{1}{x}}\left(x - \frac{1}{x}\right).$$

$$\left(\frac{2}{2\sqrt{\lambda+1}} ; 1\right)$$

38. («Физтех», 2019, 11) Решите неравенство

$$\left(\log_{\frac{3}{2}x^2-\frac{4}{3}x+\frac{5}{6}}(1+4x^2) \cdot \log_{\frac{3}{2}x^2-\frac{4}{3}x+\frac{5}{6}}(1-4x^2) + 1\right) \log_{1-16x^4}\left(\frac{3x^2}{2} - \frac{4}{3}x + \frac{5}{6}\right) \geq 1.$$

$$\left[\frac{5}{1} ; 0\right) \cap \left(0 ; \frac{11}{1}\right) \cap \left(\frac{6}{1} - ; \frac{5}{1} -\right] \cap \left[\frac{5}{1} - ; \frac{7}{1} -\right) \ni x$$

39. («Физтех», 2019, 11) Решите неравенство

$$\log_{1+x^2} (1 + 27x^5) + \log_{1-2x^2+27x^4} (1 + x^2) \leq 1 + \log_{1-2x^2+27x^4} (1 + 27x^5).$$

$$\left\{ \frac{x}{1} \right\} \cap \left(\frac{\sqrt{x}}{2} \wedge ; 0 \right) \cap \left(0 ; \frac{\sqrt{x}}{2} \wedge - \right) \cap \left[\frac{x}{1} - ; \frac{\sqrt{x}}{1} - \right) \ni x$$

40. (МГУ, мех.мат, 2004-07.1) Решить неравенство

$$\frac{\log_4(2-x) - \log_6(2-x)}{\log_6 x - \log_9 x} \leq \log_4 9.$$

$$\left(\sqrt{x}; 1 \right) \cap \left(1; 0 \right)$$