Исследование функций

Задача 1. (*МГУ, ДВИ, 2014.2*) Найдите максимальное значение функции

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 - 6x + 17\right).$$

$\boxed{-3}$

Задача 2. (*МГУ, ДВИ, 2011.6*) Найдите наибольшее из значений функции

$$\frac{9^x}{4^x - 6^x + 9^x}$$

и точку x, в которой это значение достигается.

$\boxed{\frac{4}{3},\ x = \frac{1}{\log_2 3 - 1}}$

Задача 3. (*МГУ, мехмат, 2007.5*) Найти наибольшее значение выражения

$$\sqrt{(x-1)(y-x)} + \sqrt{(7-y)(1-x)} + \sqrt{(x-y)(y-7)}$$

при $x \in [-2; 3]$ и $y \in [0; 11]$.

$\boxed{3}$

Задача 4. (*МГУ, мехмат, 2006.6*) Найти минимальное значение выражения

$$|2x - y - 1| + |x + y| + |y|,$$

где x и y — произвольные действительные числа.

$\boxed{\frac{1}{3}}$

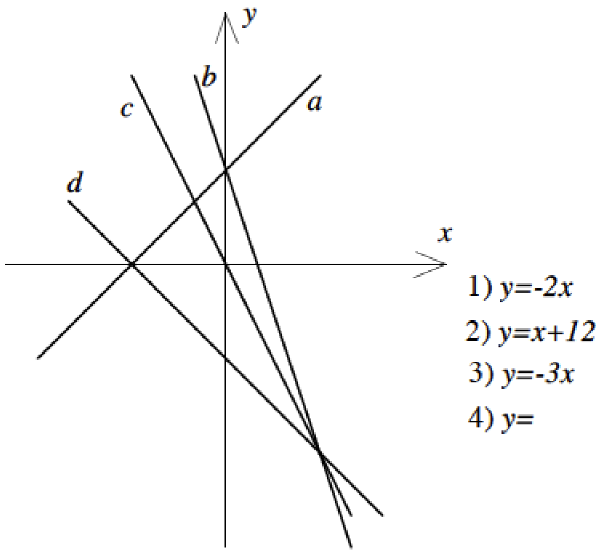
Задача 5. (*Всеросс., 2015, ШЭ, 8*) На координатной плоскости есть точки, координаты (x, y) которых удовлетворяют уравнению $y(x+1) = x^2 - 1$. Например, одна из них — точка с координатами $(1, 0)$. Изобразите *все* точки, координаты (x, y) которых удовлетворяют этому уравнению.

$\boxed{\text{Пара прямых}}$

Задача 6. (*Всеросс., 2019, МЭ, 8.2*) Часть графика линейной функции, расположенная во второй координатной четверти, вместе с осями координат образует треугольник. Во сколько раз изменится его площадь, если угловой коэффициент функции в два раза увеличить, а свободный член в два раза уменьшить?

$\boxed{\text{Уменьшится в 8 раз}}$

Задача 7. (*Всеросс., 2017, ШЭ, 9.3*) Дима начертил графики четырёх линейных функций на координатной плоскости, но забыл отметить единичные отрезки. Когда он переписывал задание в тетрадь, то отвлекся и не дописал уравнения, задающие функции под номерами 3 и 4. Найдите эти уравнения. Ответ обоснуйте.



Задача 8. (*Олимпиада им. Эйлера, финал, 2019.5*) Графики линейных функций $y = ax + c$, $y = ax + d$, $y = bx + e$, $y = bx + f$ пересекаются в вершинах квадрата P. Могут ли точки $K(a, c)$, $L(a, d)$, $M(b, e)$, $N(b, f)$ располагаться в вершинах квадрата, равного квадрату P?

Задача 9. (*Всеросс., 2015, ШЭ, 10*) Постройте график функции $y = \dfrac{x^2}{|x|}$.

Задача 10. (*Всеросс., 2015, ШЭ, 11*) Постройте график функции $y = \dfrac{\sin x}{|\sin x|}$.

Задача 11. (*Всеросс., 2014, ШЭ, 10–11*) Постройте график функции $y = (\sqrt{x})^2 + \left(\sqrt{x-1}\right)^2$.

Задача 12. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 9*) Будем называть *колебанием* функции разницу между её наибольшим и наименьшим значением. Каким может быть максимальное колебание функции $f(x)g(x)$, если известно, что отрезок $[-8; 4]$ является множеством значений функции $f(x)$, а отрезок $[-2; 6]$ является множеством значений функции $g(x)$?

$\boxed{72}$

Задача 13. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 9*) Отрезок $[-3; 9]$ является множеством значений функции $f(x)$, отрезок $[-1; 6]$ является множеством значений функции $g(x)$. На какую наибольшую величину может отличаться наибольшее значение функции $f(x)g(x)$ от наименьшего значения этой функции?

$\boxed{72}$

Задача 14. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 9*) Пусть $f(x) = x^2 + px + q$, где p, q — некоторые коэффициенты. На какую наименьшую величину может отличаться наибольшее значение функции $g(x) = |f(x)|$ от наименьшего значения этой функции на отрезке $[2; 6]$?

На 2

Задача 15. (*«Ломоносов», 2017, 9*) Про функцию $y = f(x)$ известно, что она определена и непрерывна на всей числовой прямой, нечётна и периодична с периодом 5, а также что $f(-1) = f(2) = -1$. Какое наименьшее число корней может иметь уравнение $f(x) = 0$ на отрезке $[1755; 2017]$?

Задача 16. (*«Курчатов», 2016, 10*) Известна сумма четвёртой и пятой степени некоторого нецелого числа. Всегда ли можно определить знак исходного числа?

Задача 17. (*Моск. матем. регата, 2015, 11*) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin y - \sin x = x - y, \\ \sin y - \sin z = z - y, \\ x - y + z = \pi. \end{cases}$$

(π, π, π)

Задача 18. (*Моск. матем. регата, 2016, 11*) Решите уравнение

$$2\sin\frac{\pi x}{2} - 2\cos\pi x = x^5 + 10x - 54.$$

2

Задача 19. (*Всеросс., 2019, МЭ, 10.6*) Стороны основания кирпича равны 28 см и 9 см, а высота 6 см. Улитка ползёт прямолинейно по граням кирпича из вершины нижнего основания в противоположную вершину верхнего основания. Горизонтальная и вертикальная составляющие ее скорости v_x и v_y связаны соотношением $v_x^2 + 4v_y^2 = 1$ (например, на верхней грани $v_y = 0$ см/мин, поэтому $v_x = v = 1$ см/мин). Какое наименьшее время может затратить улитка на своё путешествие?

35 мин

Задача 20. (*Всеросс., 2017, МЭ, 11.5*) Функция $f(x)$ определена для всех действительных чисел, причём для любого x выполняются равенства $f(x + 2) = f(2 - x)$ и $f(x + 7) = f(7 - x)$. Докажите, что $f(x)$ — периодическая функция.

Задача 21. (*ММО, 1994, 11.3*) В круглый бокал, осевое сечение которого — график функции $y = x^4$, опускают вишенку — шар радиуса r. При каком наибольшем r шар коснется нижней точки дна? (Другими словами, каков максимальный радиус r круга, лежащего в области $y \geqslant x^4$ и содержащего начало координат?)

$\frac{3\sqrt[3]{2}}{4}$

Задача 22. (*Всеросс., 1996, финал, 11.2*) Несколько путников движутся с постоянными скоростями по прямолинейной дороге. Известно, что в течение некоторого периода времени сумма попарных расстояний между ними монотонно уменьшалась. Докажите, что в течение того же периода сумма расстояний от некоторого путника до всех остальных тоже монотонно уменьшалась.

Задача 23. (*ММО, 1979, 10.3*) Функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[0; 1]$ и в каждой точке этого отрезка имеет первую и вторую производные. Известно, что $f(0) = f(1) = 0$ и что $|f''(x)| \leqslant 1$ на всём отрезке. Какое наибольшее значение может принимать максимум функции f для всевозможных функций, удовлетворяющих этим условиям?

$\boxed{\frac{1}{8}}$

Задача 24. (*ММО, 1986, 10.5*) Найдите минимум по всем α, β максимума функции

$$y = |\cos x + \alpha \cos 2x + \beta \cos 3x|\,.$$

$\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$