

Иррациональные уравнения и системы

Содержание

1	Учёт ОДЗ	1
2	Равносильные преобразования	2
3	Замена переменной	6
4	Умножение на сопряжённое	7
5	Системы уравнений	8
6	Задачи	11

Мы называем уравнение *иррациональным*, если оно содержит переменную под знаком корня (квадратного, кубического и т. д.). Иррациональные уравнения обладают определённой спецификой¹; методам их решения и посвящена данная статья.

1 Учёт ОДЗ

Напомним, что *область допустимых значений* (сокращённо ОДЗ) уравнения есть множество значений переменной, при которых обе части данного уравнения имеют смысл.

В большинстве ситуаций специально искать ОДЗ нет необходимости — нужно лишь следить за равносильностью осуществляемых преобразований. Однако в некоторых иррациональных уравнениях дело не доходит до каких-либо специфических приёмов; достаточно оказывается посмотреть на ОДЗ.

ЗАДАЧА 1. (МГУ, социологич. ф-т, 1997) Решить уравнение

$$\sqrt{5x - 10} = 2 - x.$$

РЕШЕНИЕ. Найдём ОДЗ: $5x - 10 \geq 0$, то есть $x \geq 2$. При таких значениях x правая часть нашего уравнения неположительна, а левая — неотрицательна. Следовательно, равенство возможно лишь в том случае, когда обе части обращаются в нуль одновременно, то есть при $x = 2$.

ОТВЕТ: 2.

ЗАДАЧА 2. Решить уравнение

$$\sqrt{6x - x^2 - 8} + \sqrt{x - 4} = x^2 - 7x + 12.$$

РЕШЕНИЕ. Найдём ОДЗ:

$$\begin{cases} 6x - x^2 - 8 \geq 0, \\ x - 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq x \leq 4, \\ x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$

Таким образом, ОДЗ нашего уравнения состоит из одной-единственной точки, и остаётся лишь проверить её. Подставляем $x = 4$ в уравнение и убеждаемся, что данное число действительно является корнем.

ОТВЕТ: 4.

¹Говоря о специфике, мы, конечно, исключаем случаи вроде $\sqrt{x^2} = 1$; такое уравнение есть обычное уравнение с модулем $|x| = 1$.

2 Равносильные преобразования

Мы переходим к рассмотрению стандартных видов иррациональных уравнений. Здесь, как мы уже говорили, предварительный поиск ОДЗ оказывается ненужным шагом; наиболее эффективно эти задачи решаются с помощью соответствующих равносильных переходов.

$$\text{Уравнения вида } \sqrt{A} = \sqrt{B}$$

Начнём с примера. Пусть надо решить уравнение

$$\sqrt{x} = \sqrt{2x + 1}.$$

В силу монотонности функции \sqrt{x} подкоренные выражения должны быть равны: $x = 2x + 1$, откуда $x = -1$. Однако подстановка этого значения x в уравнение даёт отрицательные числа под знаком квадратного корня; следовательно, $x = -1$ не является корнем данного уравнения, и потому оно не имеет решений.

Теперь рассмотрим общую ситуацию. Пусть имеется уравнение

$$\sqrt{A} = \sqrt{B},$$

где A и B — некоторые выражения, содержащие переменную (как правило, многочлены). Тогда, во-первых, подкоренные выражения должны быть равны: $A = B$. Во-вторых, оба подкоренных выражения должны быть неотрицательными; но в силу их равенства достаточно потребовать неотрицательности одного из них. Таким образом, имеем:

$$\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B, \\ A \geq 0 \end{cases}$$

или

$$\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B, \\ B \geq 0. \end{cases}$$

При этом естественно требовать неотрицательности того выражения, которое устроено проще.

ЗАДАЧА 3. Решить уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 3x - 11} = \sqrt{2x^2 - 4x - 5}.$$

РЕШЕНИЕ. Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 3x^2 - 3x - 11 = 2x^2 - 4x - 5, \\ 2x^2 - 4x - 5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 6 = 0, \\ 2x^2 - 4x - 5 \geq 0. \end{cases}$$

Уравнение полученной системы имеет корни $x_1 = 2$ и $x_2 = -3$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что x_1 не удовлетворяет неравенству системы, а x_2 удовлетворяет ему. Следовательно, только x_2 является корнем исходного уравнения.

ОТВЕТ: -3 .

Ну а теперь представьте себе, что вы начали решение с поиска ОДЗ. Представили? ;-)

В данном уравнении было по большому счёту безразлично, неотрицательности какого из двух подкоренных выражений требовать. А вот в следующей задаче это окажется существенно.

ЗАДАЧА 4. Решить уравнение

$$\sqrt{x^2 - 6x + 4} = \sqrt{x - 1}.$$

РЕШЕНИЕ. Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 4 = x - 1, \\ x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 7x + 5 = 0, \\ x - 1 \geq 0. \end{cases}$$

Уравнение полученной системы имеет корни

$$x_1 = \frac{7 + \sqrt{29}}{2}, \quad x_2 = \frac{7 - \sqrt{29}}{2}.$$

Число x_1 удовлетворяет неравенству системы очевидным образом и потому является корнем исходного уравнения. Проверим x_2 :

$$x_2 - 1 = \frac{7 - \sqrt{29}}{2} - 1 = \frac{5 - \sqrt{29}}{2} = \frac{\sqrt{25} - \sqrt{29}}{2} < 0.$$

Следовательно, x_2 не является корнем исходного уравнения.

Заметьте, что проверить неотрицательность выражения $x - 1$ (при таких-то x_1 и x_2 !) оказывается существенно легче, чем делать это для квадратного трёхчлена $x^2 - 6x + 4$.

ОТВЕТ: $\frac{7 + \sqrt{29}}{2}$.

Уравнения вида $A\sqrt{B} = 0$

Рассмотрим уравнение

$$A\sqrt{B} = 0,$$

где A и B — выражения, содержащие переменную (как правило, многочлены). Тут возможны два случая: 1) $B = 0$, и при этом A определено; 2) $A = 0$, и при этом $B \geq 0$. Таким образом, имеет место эквивалентность:

$$A\sqrt{B} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0, \\ A \text{ определено,} \\ A = 0, \\ B \geq 0. \end{cases} \quad (1)$$

ЗАДАЧА 5. (МГУ, мехмат, 1980) Решить уравнение

$$(x^2 - 4)\sqrt{x + 1} = 0.$$

РЕШЕНИЕ. В силу (1) имеем:

$$(x^2 - 4)\sqrt{x + 1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 0, \\ \begin{cases} x^2 - 4 = 0, \\ x + 1 \geq 0. \end{cases} \end{cases}$$

Первое уравнение совокупности даёт $x = -1$. Решением системы служит $x = 2$.

ОТВЕТ: $-1, 2$.

Уравнения вида $\sqrt{A} = B$

Снова начнём с примера. Решим уравнение

$$\sqrt{2-x} = x.$$

Возведём обе части в квадрат:

$$2-x = x^2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1, x_2 = -2.$$

Поочерёдно подставляя x_1 и x_2 в наше уравнение, убеждаемся, что x_1 является его корнем, а x_2 — не является (получается неверное числовое равенство $2 = -2$).

Почему в процессе решения возник лишний корень x_2 ? Причина проста — мы возвели обе части уравнения в квадрат, в результате чего неверное числовое равенство $2 = -2$ стало верным равенством $4 = 4$. Возведение в квадрат — *неравносильное* преобразование, которое может приводить к появлению лишних корней. Эти лишние корни нужно затем исключить — либо непосредственной проверкой (что не всегда удобно), либо с помощью некоторого дополнительного условия².

Перейдём к рассмотрению общей ситуации. По определению арифметического квадратного корня, \sqrt{a} есть такое число $b \geq 0$, что $a = b^2$. Поэтому уравнение $\sqrt{A} = B$ равносильно уравнению $A = B^2$ при дополнительном условии неотрицательности B :

$$\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} A = B^2, \\ B \geq 0. \end{cases} \quad (2)$$

ЗАДАЧА 6. (МГУ, физический ф-т, 1998) Решить уравнение

$$\sqrt{3x - x^2 - 2} = 2x - 3.$$

РЕШЕНИЕ. В силу эквивалентности (2) имеем:

$$\sqrt{3x - x^2 - 2} = 2x - 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - x^2 - 2 = (2x - 3)^2, \\ 2x - 3 \geq 0. \end{cases} \quad (3)$$

Первое уравнение системы (3) приводится к виду

$$5x^2 - 15x + 11 = 0$$

и имеет корни

$$x_1 = \frac{15 + \sqrt{5}}{10}, \quad x_2 = \frac{15 - \sqrt{5}}{10}.$$

Неравенство системы (3) имеет вид

$$x \geq \frac{3}{2}.$$

Легко видеть, что

$$x_1 > \frac{15}{10} = \frac{3}{2}, \quad x_2 < \frac{15}{10} = \frac{3}{2}.$$

²Возводя обе части уравнения в квадрат, мы переходим к уравнению, которое не равносильно исходному, но является его *следствием*. Уравнение-следствие среди своих корней имеет все корни исходного уравнения и, возможно, ещё какие-то корни.

Решая уравнение-следствие, мы получаем *необходимые* условия для корней исходного уравнения. После этого нужно проверить, какие из этих условий являются к тому же *достаточными*. Если вы не очень хорошо владеете данной терминологией, почитайте статью «[Необходимые и достаточные условия](#)».

Следовательно, корнем исходного уравнения является только x_1 .

ОТВЕТ: $\frac{15+\sqrt{5}}{10}$.

Замечание 1. Обратите внимание, что для обнаружения лишнего корня гораздо легче проверить выполнение неравенства $2x - 3 \geq 0$, чем непосредственно подставлять иррациональные x_1 и x_2 в исходное уравнение.

Замечание 2. Распространённое заблуждение новичка состоит в том, чтобы «начать с нахождения ОДЗ», то есть с решения неравенства $3x - x^2 - 2 \geq 0$. В данном случае это совершенно бессмысленно. Ведь подкоренное выражение $3x - x^2 - 2$ приравнивается в силу (3) к полному квадрату $(2x - 3)^2$ и потому автоматически оказывается неотрицательным.

Уравнения вида $\sqrt{A} \pm \sqrt{B} = C$

Наличие двух радикалов в уравнениях вида $\sqrt{A} \pm \sqrt{B} = C$ приводит к необходимости двукратного возведения в квадрат.

ЗАДАЧА 7. (МГУ, ИСАА, 1991) Решить уравнение

$$\sqrt{3x - 5} - \sqrt{4 - x} = 1.$$

РЕШЕНИЕ. Перед первым возведением в квадрат полезно переписать уравнение в виде

$$\sqrt{3x - 5} = 1 + \sqrt{4 - x}. \quad (4)$$

Почему это полезно? Дело в том, что левая часть исходного уравнения может быть отрицательной, и если мы захотим возводить в квадрат исходное уравнение, то придётся накладывать дополнительное условие неотрицательности левой части: $\sqrt{3x - 5} - \sqrt{4 - x} \geq 0$. А вот обе части уравнения (4) неотрицательны, поэтому возведение уравнения (4) в квадрат будет равносильным преобразованием:

$$\sqrt{3x - 5} = 1 + \sqrt{4 - x} \Leftrightarrow 3x - 5 = (1 + \sqrt{4 - x})^2;$$

после очевидных преобразований приходим к уравнению

$$\sqrt{4 - x} = 2x - 5.$$

Данное уравнение, равносильное исходному, в свою очередь равносильно системе

$$\begin{cases} 4 - x = (2x - 5)^2, \\ 2x - 5 \geq 0. \end{cases}$$

Уравнение данной системы приводится к виду $4x^2 - 19x + 21 = 0$ и имеет корни $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{7}{4}$. Неравенству системы удовлетворяет лишь x_1 .

ОТВЕТ: 3.

Предваряя следующий пункт «Замена переменной», укажем здесь ещё один способ решения данного уравнения. Делаем *двойную* замену

$$u = \sqrt{3x - 5}, \quad v = \sqrt{4 - x}.$$

Зачем нам две переменных вместо одной? Дело в том, что наряду с исходным уравнением, которое в этих обозначениях имеет вид $u - v = 1$, существует ещё одно простое соотношение между u и v , не содержащее переменной x . А именно, заметим, что

$$u^2 + 3v^2 = 3x - 5 + 3(4 - x) = 7.$$

В результате получаем систему

$$\begin{cases} u - v = 1, \\ u^2 + 3v^2 = 7. \end{cases}$$

Выражаем u из первого уравнения: $u = v + 1$, и подставляем во второе; получим

$$2v^2 + v - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v_1 = 1, \quad v_2 = -\frac{3}{2}.$$

Значение v_2 отпадает ввиду условия $v \geq 0$, а значение v_1 приводит к уравнению $\sqrt{4-x} = 1$, откуда $x = 3$.

Обратите внимание, что нам не понадобилось значение u . Его, разумеется, можно найти ($u = 2$), и оно, очевидно, приводит к тому же самому значению $x = 3$.

3 Замена переменной

В некоторых задачах бывает полезно сделать замену переменной, обозначив новой буквой имеющийся *корень* из некоторого выражения.

ЗАДАЧА 8. (МГУ, социологич. ф-т, 1999) Решить уравнение

$$\sqrt{y-2} = 7-y.$$

РЕШЕНИЕ. Мы уже умеем решать такие уравнения с помощью равносильного перехода (2). Но здесь возможен и другой способ. Обозначим $t = \sqrt{y-2}$; тогда $t^2 = y-2$ и $y = 2+t^2$, причём $t \geq 0$. Наше уравнение переписывается в виде:

$$t = 7 - (2 + t^2) \quad \Leftrightarrow \quad t^2 + t - 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t_1 = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2}, \quad t_2 = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2}.$$

Условию $t \geq 0$ удовлетворяет лишь число t_1 . Поэтому обратная замена:

$$y = 2 + t_1^2 = 2 + \left(\frac{-1 + \sqrt{21}}{2} \right)^2 = \frac{15 - \sqrt{21}}{2}.$$

ОТВЕТ: $\frac{15-\sqrt{21}}{2}$.

Отметим, что характерной особенностью данного способа является отсеечение лишних корней ещё «на этапе переменной t »: корень t_2 оказался лишним, будучи отрицательным.

ЗАДАЧА 9. (МГУ, ВМК, 1989) Решить уравнение

$$8\sqrt{12 + 16x - 16x^2} + 4x = 33 + 4x^2.$$

РЕШЕНИЕ. Перепишем уравнение в виде:

$$4x - 4x^2 + 16\sqrt{3 + 4x - 4x^2} = 33 \quad \Leftrightarrow \quad (3 + 4x - 4x^2) + 16\sqrt{3 + 4x - 4x^2} - 36 = 0.$$

Замена $t = \sqrt{3 + 4x - 4x^2}$ приводит к квадратному уравнению:

$$t^2 + 16t - 36 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t_1 = -18, \quad t_2 = 2.$$

Поскольку $t \geq 0$, число t_1 отпадает. Обратная замена:

$$\sqrt{3 + 4x - 4x^2} = t_2 = 2 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

ОТВЕТ: $\frac{1}{2}$.

ЗАДАЧА 10. (МФТИ, 2001) Решить уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 12x + 46} - \sqrt{x^2 - 6x + 22} = 3.$$

РЕШЕНИЕ. Здесь, как и в предыдущем пункте, успешно работает двойная замена:

$$u = \sqrt{2x^2 - 12x + 46}, \quad v = \sqrt{x^2 - 6x + 22}.$$

В самом деле,

$$u^2 - 2v^2 = 2x^2 - 12x + 46 - 2(x^2 - 6x + 22) = 2$$

(переменная x исчезла из данной разности), так что мы имеем систему

$$\begin{cases} u - v = 3, \\ u^2 - 2v^2 = 2. \end{cases}$$

Выражая u из первого уравнения и подставляя во второе, получим квадратное уравнение

$$v^2 - 6v - 7 = 0 \Leftrightarrow v_1 = -1, \quad v_2 = 7.$$

Число v_1 отпадает ввиду условия $v \geq 0$, а обратная замена $\sqrt{x^2 - 6x + 22} = 7$ даёт решения $x = 9$ и $x = -3$.

ОТВЕТ: 9, -3.

4 Умножение на сопряжённое

Выражения $\sqrt{A} + \sqrt{B}$ и $\sqrt{A} - \sqrt{B}$ называются *сопряжёнными*. Произведение сопряжённых выражений, будучи разностью квадратов, не содержит знаков квадратного корня.

ЗАДАЧА 11. (МГУ, геологич. ф-т, 1985) Решить уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 1} + \sqrt{x^2 - x + 1} = \sqrt{3x^2 + 2x + 1} + \sqrt{x^2 + 2x + 4}.$$

РЕШЕНИЕ. Перепишем уравнение следующим образом:

$$\left(\sqrt{3x^2 + 2x + 1} - \sqrt{3x^2 - 1}\right) + \left(\sqrt{x^2 + 2x + 4} - \sqrt{x^2 - x + 1}\right) = 0.$$

Выражения в обеих скобках умножим и разделим на сопряжённые (которые не обращаются в нуль ни при каких значениях x):

$$\begin{aligned} & \frac{(\sqrt{3x^2 + 2x + 1} - \sqrt{3x^2 - 1})(\sqrt{3x^2 + 2x + 1} + \sqrt{3x^2 - 1})}{\sqrt{3x^2 + 2x + 1} + \sqrt{3x^2 - 1}} + \\ & + \frac{(\sqrt{x^2 + 2x + 4} - \sqrt{x^2 - x + 1})(\sqrt{x^2 + 2x + 4} + \sqrt{x^2 - x + 1})}{\sqrt{x^2 + 2x + 4} + \sqrt{x^2 - x + 1}} = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{(3x^2 + 2x + 1) - (3x^2 - 1)}{\sqrt{3x^2 + 2x + 1} + \sqrt{3x^2 - 1}} + \frac{(x^2 + 2x + 4) - (x^2 - x + 1)}{\sqrt{x^2 + 2x + 4} + \sqrt{x^2 - x + 1}} = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{2x + 2}{\sqrt{3x^2 + 2x + 1} + \sqrt{3x^2 - 1}} + \frac{3x + 3}{\sqrt{x^2 + 2x + 4} + \sqrt{x^2 - x + 1}} = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (x + 1) \left(\frac{2}{\sqrt{3x^2 + 2x + 1} + \sqrt{3x^2 - 1}} + \frac{3}{\sqrt{x^2 + 2x + 4} + \sqrt{x^2 - x + 1}} \right) = 0. \end{aligned}$$

Допустимыми являются те значения x , которые удовлетворяют неравенству $3x^2 - 1 \geq 0$ (остальные подкоренные выражения, как легко проверить, положительны при любых x). При всех допустимых значениях x выражение в скобках положительно, поэтому наше уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x + 1 = 0, \\ 3x^2 - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1.$$

ОТВЕТ: -1 .

5 Системы уравнений

При решении иррациональных систем используется весь известный вам арсенал средств: замены переменных и различные преобразования уравнений.

ЗАДАЧА 12. (МФТИ, 2002) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{11x - y} - \sqrt{y - x} = 1, \\ 7\sqrt{y - x} + 6y - 26x = 3. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Делаем замену

$$u = \sqrt{11x - y}, \quad v = \sqrt{y - x}.$$

Замечаем при этом, что

$$6y - 26x = 4(y - x) - 2(11x - y) = 4v^2 - 2u^2.$$

Таким образом, система переписывается в виде

$$\begin{cases} u - v = 1, \\ 7v + 4v^2 - 2u^2 = 3. \end{cases}$$

Выражаем u из первого уравнения: $u = v + 1$, и подставляем во второе; приходим к уравнению

$$2v^2 + 3v - 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v_1 = 1, \quad v_2 = -\frac{5}{2}.$$

Значение v_2 отпадает ввиду условия $v \geq 0$, а значению $v_1 = 1$ соответствует $u = 2$. Обратная замена:

$$\begin{cases} \sqrt{11x - y} = 2, \\ \sqrt{y - x} = 1, \end{cases}$$

откуда $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{3}{2}$.

ОТВЕТ: $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

ЗАДАЧА 13. (МФТИ, 2003) Найти все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} 3x - 1 = \frac{y}{x} + 2\sqrt{x + y}, \\ \sqrt{y + \sqrt{x + y}} = y - 3x - 6. \end{cases} \quad (5)$$

РЕШЕНИЕ. Действуем при следующих ограничениях:

$$x \neq 0, \quad x + y \geq 0, \quad y + \sqrt{x + y} \geq 0. \quad (6)$$

Преобразуем первое уравнение, умножая его на x :

$$\begin{aligned} 3x^2 - x = y + 2x\sqrt{x+y} &\Leftrightarrow 4x^2 = x^2 + 2x\sqrt{x+y} + (x+y) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4x^2 = (x + \sqrt{x+y})^2 \Leftrightarrow (x - \sqrt{x+y})(3x + \sqrt{x+y}) = 0. \end{aligned}$$

Соответственно, имеем два случая.

1. Пусть сначала $\sqrt{x+y} = x$; тогда $\sqrt{y + \sqrt{x+y}} = \sqrt{y+x} = x$, и возникает дополнительное ограничение

$$x \geq 0. \quad (7)$$

При ограничениях (6) и (7) система (5) равносильна системе

$$\begin{cases} 3x^2 - x = y + 2x \cdot x, \\ x = y - 3x - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x = y, \\ 4x + 6 = y, \end{cases}$$

что приводит к уравнению $x^2 - 5x - 6 = 0$ с корнями $x_1 = -1$ и $x_2 = 6$. Корень x_1 отпадает ввиду ограничения (7), а значению x_2 отвечает $y = 30$. Пара (6, 30) удовлетворяет ограничениям (6) и потому является решением исходной системы.

2. Пусть теперь $\sqrt{x+y} = -3x$; это даёт дополнительное к (6) ограничение

$$x \leq 0. \quad (8)$$

Второе уравнение системы (5) приобретает вид

$$\sqrt{y - 3x} = y - 3x - 6,$$

что является квадратным уравнением относительно переменной $t = \sqrt{y - 3x}$:

$$t^2 - t - 6 = 0 \Leftrightarrow t_1 = -2, t_2 = 3.$$

Значение t_1 отпадает ввиду $t \geq 0$, а значение t_2 даёт уравнение $y - 3x = 9$.

Таким образом, при ограничениях (6) и (8) система (5) равносильна системе

$$\begin{cases} 3x^2 - x = y + 2x \cdot (-3x), \\ y - 3x = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2 - x = y, \\ y = 3x + 9, \end{cases}$$

что приводит к уравнению

$$9x^2 - 4x - 9 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{2 + \sqrt{85}}{9}, x_2 = \frac{2 - \sqrt{85}}{9}.$$

Значение x_1 отпадает ввиду ограничения (8), а отрицательному значению x_2 отвечает $y = \frac{29 - \sqrt{85}}{3}$. Пара $\left(\frac{2 - \sqrt{85}}{9}, \frac{29 - \sqrt{85}}{3}\right)$ удовлетворяет ограничениям (6) и потому является решением исходной системы.

ОТВЕТ: (6, 30); $\left(\frac{2 - \sqrt{85}}{9}, \frac{29 - \sqrt{85}}{3}\right)$.

ЗАДАЧА 14. («Физтех», 2010) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{25 - x^2} + \sqrt{25 - y^2} = 7, \\ \sqrt{25 - x^2} - \sqrt{25 - y^2} = \frac{1}{7}(y^2 - 2x^2 + 2x + 3). \end{cases} \quad (9)$$

РЕШЕНИЕ. Вначале проясним логику дальнейших действий. Если в уравнении $A = B$ обе части не обращаются в нуль (а именно таково первое уравнение нашей системы), то имеет место эквивалентность

$$\begin{cases} A = B, \\ C = D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B, \\ AC = BD \end{cases}$$

(второе уравнение заменили произведением уравнений). В самом деле, очевидно, что любое решение левой системы является в то же время и решением правой системы; вместе с тем, всякое решение правой системы служит и решением левой, поскольку второе уравнение правой системы можно сократить на ненулевой множитель $A = B$.

Итак, перемножаем уравнения системы (9):

$$y^2 - x^2 = y^2 - 2x^2 + 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1, x_2 = 3.$$

Теперь достаточно поочерёдно подставить полученные значения x в первое уравнение исходной системы (9) и найти соответствующие значения y .

ОТВЕТ: $(-1, \pm 2\sqrt{7\sqrt{6} - 12})$; $(3, \pm 4)$.

ЗАДАЧА 15. («Физтех», 2009) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + \sqrt{\frac{9}{4}x^2 - 4y^2}} = \frac{3}{4} + x, \\ \sqrt{\frac{15}{16} + 3x + \frac{8}{3}y} = 1 - \frac{8}{3}y. \end{cases} \quad (10)$$

РЕШЕНИЕ. Сразу делаем замену $t = \frac{8}{3}y$ (это несколько упростит дальнейшие выкладки):

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + \sqrt{\frac{9}{4}x^2 - \frac{9}{16}t^2}} = \frac{3}{4} + x, \\ \sqrt{\frac{15}{16} + 3x + t} = 1 - t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \sqrt{\frac{9}{4}x^2 - \frac{9}{16}t^2} = \frac{9}{16} + \frac{3}{2}x + x^2, \\ \frac{3}{4} + x \geq 0, \\ \frac{15}{16} + 3x + t = 1 - 2t + t^2, \\ 1 - t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\frac{9}{4}x^2 - \frac{9}{16}t^2} = \frac{9}{16} + \frac{3}{2}x, \\ 3x = \frac{1}{16} - 3t + t^2, \\ x \geq -\frac{3}{4}, \\ t \leq 1. \end{cases} \quad (11)$$

Первое уравнение системы (11) умножим на $\frac{4}{3}$:

$$\sqrt{4x^2 - t^2} = \frac{3}{4} + 2x,$$

и возведём в квадрат, что после упрощения даст уравнение $-t^2 = \frac{9}{16} + 3x$. Дополнительное ограничение

$$\frac{3}{4} + 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{3}{8}$$

является усилением ограничения $x \geq -\frac{3}{4}$. Система (11) таким образом равносильна системе

$$\begin{cases} -t^2 = \frac{9}{16} + 3x, \\ 3x = \frac{1}{16} - 3t + t^2, \\ x \geq -\frac{3}{8}, \\ t \leq 1. \end{cases} \quad (12)$$

Из первых двух уравнений системы (12) получаем уравнение относительно t :

$$2t^2 - 3t + \frac{5}{8} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t_1 = \frac{5}{4}, \quad t_2 = \frac{1}{4}.$$

Значение t_1 отпадает ввиду последнего ограничения системы (12), а значение t_2 даёт $x = -\frac{5}{24}$ и $y = \frac{3}{32}$.

ОТВЕТ: $(-\frac{5}{24}, \frac{3}{32})$.

6 Задачи

Во всех задачах, если не сказано иное, требуется решить уравнение или систему уравнений.

Учёт ОДЗ

1. (МГУ, социологич. ф-т, 1997) $\sqrt{-3x+3} = x-1$.

I

2. $\sqrt{x^2-x} + \sqrt{2-x-x^2} = \sqrt{x}-1$.

I

Равносильные преобразования

3. а) $\sqrt{x^2-7x+1} = \sqrt{2x^2-15x+8}$; б) $\sqrt{2x^2+x-4} = \sqrt{3x+3}$.

$\frac{c}{2} \wedge \mp$

4. (МГУ, ф-т гос. управления, 2006) $\sqrt{x^4-10x^2+25} = \sqrt{x^4-4x^2+4}$.

$\frac{c}{2} \wedge \mp$

5. (МГУ, мехмат, 1980) $(x^2+x-6)\sqrt{x+1} = 0$.

$\tau \wedge \Gamma -$

6. (МГУ, экономич. ф-т, 1986) $\sqrt{3x+4}(9x^2+21x+10) = 0$.

$\frac{c}{2} - \frac{c}{4}$

7. (МГУ, геологич. ф-т, 1983) $(x+1)\sqrt{x^2-3x-6} = 2x+2$.

$\frac{c}{2}, \tau -$

8. (МГУ, ф-т почвоведения, 1997) $x = \sqrt{8x + 9}$. 6
9. (МГУ, географич. ф-т, 1993) $\sqrt{13 - 2x} = 5 - x$. 7
10. (МГУ, геологич. ф-т, 1996) $\sqrt{3x - 5} = x - 11$. 81
11. (МГУ, ИСАА, 1997) $\sqrt{3}(x + 2) - \sqrt{9 + 2x} = 0$. $\frac{\xi}{1}$
12. (МГУ, географич. ф-т, 2000) $\sqrt{3x + 2} = 2x - 4$. $\frac{8}{2\xi 1^{\wedge} + 61}$
13. (МГУ, экономич. ф-т, 2003) $\sqrt{5 + 8x - 4x^2} = 4x - 1$. 1
14. (МГУ, физический ф-т, 1988) $\sqrt{4 - 6x - x^2} = x + 4$. 1-
15. (МГУ, географич. ф-т, 1982) $x + \sqrt{2x^2 - 14x + 13} = 5$. 7-
16. (МГУ, ф-т психологии, 1996) $\sqrt{2x^2 - 21x + 4} = 2 - 11x$. 0
17. (МГУ, географич. ф-т, 1999) $\sqrt{2x^2 - 8x + 5} = x - 2$. $\xi^{\wedge} + z$
18. (МГУ, физический ф-т, 1985) $\sqrt{x^4 - 2x - 5} = 1 - x$. $\xi^{\wedge} -$
19. (МГУ, ФНМ, 2001) $\frac{1}{2} - x^2 = \sqrt{\frac{1}{2} - x}$. $\frac{z}{1 - \xi^{\wedge}}$
20. (МГУ, ВШБ, 2003) $22x^2 + 10x = \sqrt{1276x^3 + 364x^2}$. z ' 0
21. (МГУ, физический ф-т, 1999) $\sqrt{x + 2} \sqrt{2x + 1} = x + 4$. $\frac{z}{99^{\wedge} + \xi}$

22. (МГУ, ф-т почвоведения, 1998) $\sqrt{x+1} - \sqrt{4x-3} = 1$.

6
2

23. (МГУ, ф-т психологии, 2001) $\sqrt{x+2} + \sqrt{8-x} = \sqrt{15}$.

7
8^9+9

24. (МГУ, экономич. ф-т, 1982) $\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-5} = \sqrt{x-2}$.

8

25. (МГУ, социологич. ф-т, 2003) $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x-2} = \sqrt{3x+7}$.

8

26. (МГУ, физический ф-т, 2007) $\sqrt{x-2} - \sqrt{2x+2} = \sqrt{2x-5} - \sqrt{3x-1}$.

8

27. (МГУ, физический ф-т, 2000) $\frac{1}{\sqrt{x+2}} + \sqrt{x+2} = \sqrt{3x+1}$.

9
19^+1-

28. (МГУ, ф-т почвоведения, 2004) $\sqrt{x^2+5x+4} - \sqrt{x^2-x-6} = -\sqrt{2x^2+4x-2}$.

9-

29. («Физтех», 2013, 10–11) Найдите сумму корней уравнения $\sqrt[3]{x+5} + \sqrt{3-x} = 2$.

91-

Замена переменной

30. (МГУ, филологич. ф-т, 2007) $-x - \sqrt{-x} = 10$.

92-

31. (МГУ, МШЭ, 2006) $\sqrt{x+3} = 9-x$.

9

32. (МГУ, химический ф-т, 1993) $\sqrt{x+4} = x+2$.

0

33. (МГУ, химический ф-т, 1998) $7-x = 3\sqrt{5-x}$.

1, 4

34. (МГУ, социологич. ф-т, 1999) $\sqrt{x-1} = 6-x$.

13-^21

35. (МГУ, геологич. ф-т, 1983) $(x+1)\sqrt{16x+17} = (x+1)(8x-23)$.

1, 4

36. (МГУ, экономич. ф-т, 1983) $x^2 + \sqrt{x^2 + 11} = 31$.

97

37. (МГУ, геологич. ф-т, 1994) $x^2 + 2\sqrt{x^2 + 3x - 4} = 4 - 3x$.

14

38. (МГУ, экономич. ф-т, 2006) $2\sqrt{2x^2 - x + 8} = x - 2x^2 + 7$.

11

39. (МГУ, физический ф-т, 1999) $\sqrt{\frac{4}{x-2} + 1} = \frac{1}{x-2}$.

98

40. («Ломоносов», 2017, 10–11) $\sqrt{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}} = 2\sqrt{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}} + \sqrt{2}$.

16

41. («Покори Воробьёвы горы!», 2011, 10–11) $7x^2 + 20x - 14 = 5\sqrt{x^4 - 20x^2 + 4}$.

11

42. («Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11) Решите уравнение

$$\left| x\sqrt{1-x^2} + x \right| = \sqrt{1+x^2}.$$

1

Двойная замена

43. (МГУ, ф-т почвоведения, 1998) $\sqrt{x+1} - \sqrt{5x-6} = 1$.

4

44. (МФТИ, 2001) $\sqrt{2x^2 - 8x + 25} - \sqrt{x^2 - 4x + 13} = 2$.

7, 9

45. («Покори Воробьёвы горы!», 2011, 9–11) $\sqrt[3]{15x+1-x^2} + \sqrt[3]{x^2-15x+27} = 4$.

0, 2, 13, 15

46. (МГУ, географич. ф-т, 1995) $\sqrt[4]{x - \frac{3}{2}} + \sqrt[4]{10 - x} = 2$.

2

47. (МГУ, химический ф-т, 2003)

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+x}}\right) \cdot (\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) = 8.$$

0

48. (МГУ, ИСАА, 2005) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2+4x+3} = \sqrt{(x+2)^3}$.

$\frac{7}{8-2\sqrt{3}}$

49. (МГУ, химический ф-т, 2002) При каждом значении параметра a решить уравнение

$$\sqrt{-x^3 + (a-1)x^2 + (a-1)x + a} = 2x^2 + 3x + 2 - a.$$

Если $a \geq 0$, то $x = -1 \mp \sqrt{a}$; если $a > 0$, то решений нет

Умножение на сопряжённое

50. («Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11) Решите уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+3}} + \frac{1}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x+4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{x+2017} + \sqrt{x+2018}} = 42.$$

2

51. (МГУ, геологич. ф-т, 1985)

$$\sqrt{3x^2 - 7x + 3} - \sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{3x^2 - 5x - 1} - \sqrt{x^2 - 3x + 4}.$$

2

52. («Покори Воробьёвы горы!», 2012, 10–11)

$$\frac{27x - 24}{2x + \sqrt{4x^2 - 3}} - \frac{36x - 32}{\sqrt{4x^2 - 3} + \sqrt{4x^2 + 1}} = 9x^2 - 26x + 16.$$

$\frac{6}{8} \cdot \frac{3}{2 + \sqrt{13}}$

Системы уравнений

53. (МГУ, ф-т психологии, 1981)

$$\begin{cases} x - y + \sqrt{x^2 - 4y^2} = 2, \\ x^5 \cdot \sqrt{x^2 - 4y^2} = 0. \end{cases}$$

$(4, 2); \left(\frac{3}{4}, -\frac{3}{2}\right)$

54. (МГУ, геологич. ф-т, 1995)

$$\begin{cases} x^3 \cdot \sqrt{x-y} = 0, \\ 2y^2 + y = 21 + 2xy. \end{cases}$$

$$\left(\frac{2}{1}, 0\right); (17, 17)$$

55. (МГУ, мехмат, 1980)

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 4xy - 3y^2} = x + 1, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

$$(1, 2)$$

56. (МГУ, химический ф-т, 1977)

$$\begin{cases} \sqrt{x+y-1} = 1, \\ \sqrt{x-y+2} = 2y-2. \end{cases}$$

$$\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{1}\right)$$

57. (МГУ, геологич. ф-т, 1999)

$$\begin{cases} 4x + 5y = \sqrt{16x^2 - 25y^2}, \\ x^2 + 6x - 7 = 0. \end{cases}$$

$$\left(\frac{5}{28}, 2\right); \left(\frac{5}{4}, 1\right); (0, 1)$$

58. (МГУ, ВШБ, 2004)

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{y-2} = 1, \\ x + y - 20 = 0. \end{cases}$$

$$(67, 6); (9, 29)$$

59. (МГУ, химический ф-т, 1991)

$$\begin{cases} \sqrt{2x-1} + \sqrt{y+3} = 3, \\ 2xy - y + 6x = 7. \end{cases}$$

$$(2, \frac{2}{3}); (1, 1)$$

60. (МГУ, физический ф-т, 2002)

$$\begin{cases} 5\sqrt{2x^2 - y^4} = 4x - 3y, \\ 4\sqrt{2x^2 - y^4} = 3x - 2y. \end{cases}$$

$$(1, \sqrt{17}); (0, 0)$$

61. (МГУ, физический ф-т, 2006)

$$\begin{cases} 3x + y + \sqrt{9x^2 - y^2} = 6, \\ y\sqrt{(3x + y)(3x - y)} = 2. \end{cases}$$

$$\left(\frac{5}{2\sqrt{13}}, \frac{6}{8}\right)$$

62. («Физтех», 2016, 9–11)

$$\begin{cases} 2x + \sqrt{2x + 3y} - 3y = 5, \\ 4x^2 + 2x + 3y - 9y^2 = 32. \end{cases}$$

$$\left(\frac{7}{8}, \frac{1}{11}\right)$$

63. («Физтех», 2016, 9–11) Найдите все пары положительных чисел (x, y) , удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} y - 2\sqrt{xy} - \sqrt{\frac{y}{x}} + 2 = 0, \\ 3x^2y^2 + y^4 = 84. \end{cases}$$

$$\left(\frac{61}{18}\sqrt[4]{2}, \frac{92}{12}\sqrt[4]{2}\right); \left(8, \frac{8}{1}\right)$$

64. (МФТИ, 2002)

$$\begin{cases} \sqrt{x - 4y} - 2\sqrt{3y + x} = 1, \\ 7\sqrt{3y + x} + 22y + 5x = 13. \end{cases}$$

$$(8, -81)$$

65. (МФТИ, 2005)

$$\begin{cases} 1 + xy = \frac{x^2y^2}{2x - y} + \frac{2x - y}{xy}, \\ \frac{2x - y}{xy}\sqrt{2x - y} = 4 - 3xy. \end{cases}$$

$$\left(7, \frac{7}{1}\right); (1, 1)$$

66. (МФТИ, 2005)

$$\begin{cases} 1 + \frac{1}{\sqrt{x - 2y}} = \frac{xy}{x - 2y} + \frac{\sqrt{x - 2y}}{xy}, \\ xy\sqrt{\frac{xy}{x - 2y}} = 2 - \sqrt{x - 2y}. \end{cases}$$

$$\left(\frac{8}{1}, 7\right); (1, -1)$$

67. («Ломоносов», 2013, 9)

$$\begin{cases} x^2 = 2\sqrt{y^2 + 1}, \\ y^2 = 2\sqrt{z^2 - 1} - 2, \\ z^2 = 4\sqrt{x^2 + 2} - 6. \end{cases}$$

$$\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \right); \left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \right); \left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \right); \left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \right)$$

68. (МФТИ, 2003)

$$\begin{cases} 1 - 5y = \frac{x}{y} - 6\sqrt{x - y}, \\ \sqrt{x - \sqrt{x - y}} = x - 5y - 6. \end{cases}$$

$$\left(\frac{47 + \sqrt{229}}{2 + \sqrt{229}}, \frac{5}{2} \right); (9, 6)$$

69. («Физтех», 2014)

$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 - 4xy = 4x - 2y + 3, \\ \sqrt{6x - 3y} = 2 - xy. \end{cases}$$

$$(1, -1); \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

70. («Физтех», 2008)

$$\begin{cases} x + \sqrt{\frac{x}{x - y}} = \frac{42}{x - y}, \\ xy - 4x = 9. \end{cases}$$

$$\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{2} \right); \left(\frac{2}{3}, \frac{5}{2} \right)$$

71. («Физтех», 2011)

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - \frac{2}{3}y} = y - x, \\ \frac{9}{4}y^2 + x^3 = 2x + 1. \end{cases}$$

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right); \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right); \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right); \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

72. («Физтех», 2010)

$$\begin{cases} \sqrt{25 - y^2} - \sqrt{25 - x^2} = 1, \\ \sqrt{25 - y^2} + \sqrt{25 - x^2} = x^2 - 2y^2 + 2y + 3. \end{cases}$$

$$(1, 3); (-1, 3); (1, 3); (-1, 3)$$

73. («Физтех», 2009)

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{4}{9}x^2 + \sqrt{x^2 - 9y^2}} = \frac{3}{4} - \frac{2}{3}x, \\ \sqrt{\frac{15}{16} - 2x - 4y} = 1 + 4y. \end{cases}$$

$$\left(\frac{91}{1} - ; \frac{91}{9}\right)$$

74. («Физтех», 2012)

$$\begin{cases} 3x^2 + 11xy + 10y^2 + 10x + 20y = 0, \\ \sqrt{25 - y(3x + 5y + 10)} + \sqrt{y^2 - 10y + 30} = 5. \end{cases}$$

$$(-14, 7); (-6, 3)$$