

Уравнения высших порядков

Содержание

1	Непосредственная группировка	1
2	Подбор корня	2
3	Формулы Виета для кубического уравнения	3
4	Задачи	4

Методы решения уравнений третьей и четвёртой степени (формула Кардано и метод Феррари) выходят за рамки программы обычной школы. Поэтому если на олимпиаде вам попадается уравнение степени 3 или выше, то следует искать искусственный приём, приспособленный для решения именно этого уравнения. Таким приёмом может быть, например, удачная группировка с последующим разложением на множители или выявление устойчивых выражений с соответствующей заменой переменной.

Данная статья посвящена уравнениям вида $p(x) = 0$, где $p(x)$ — многочлен третьей степени и выше, и некоторым приёмам разложения такого многочлена на множители.

1 Непосредственная группировка

В простейших случаях многочлен удаётся разложить на множители, удачно группируя друг с другом слагаемые.

ЗАДАЧА 1. Решить уравнение $2x^3 - 3x^2 - 8x + 12 = 0$.

РЕШЕНИЕ. Имеем:

$$x^2(2x - 3) - 4(2x - 3) = 0 \Leftrightarrow (2x - 3)(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow (2x - 3)(x - 2)(x + 2) = 0.$$

ОТВЕТ: $3/2, \pm 2$.

ЗАДАЧА 2. Решить уравнение $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$.

РЕШЕНИЕ. Группируем первое слагаемое с четвёртым, а второе — с третьим:

$$(x^3 + 8) - (3x^2 + 6x) = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x^2 - 2x + 4) - 3x(x + 2) = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x^2 - 5x + 4) = 0.$$

ОТВЕТ: $-2, 1, 4$.

ЗАДАЧА 3. (МГУ, социологич. ф-т, 2004) Решите уравнение

$$\frac{x^3 + 9x^2 + 18x - 2(x^2 + 9x) - 36}{\sqrt{x + 3}} = 0.$$

РЕШЕНИЕ. Если поддаться искушению раскрыть скобки и привести подобные слагаемые (тем более что сократится $18x$), то в возникшем кубическом уравнении придётся подбирать корень с целью разложить левую часть на множители. Данная процедура описана в следующем пункте и не представляет здесь никаких сложностей, однако необходимости в ней сейчас нет. Дело в том,

что несколько вычурная запись условия содержит подсказку, как именно надо группировать слагаемые. Имеем:

$$\begin{aligned}x^3 + 9x^2 + 18x - 2(x^2 + 9x) - 36 &= x(x^2 + 9x) - 2(x^2 + 9x) + 18x - 36 = \\ &= (x^2 + 9x)(x - 2) + 18(x - 2) = (x - 2)(x^2 + 9x + 18) = (x - 2)(x + 3)(x + 6).\end{aligned}$$

Наше уравнение, таким образом, равносильно системе

$$\begin{cases}(x - 2)(x + 3)(x + 6) = 0, \\ x + 3 > 0,\end{cases}$$

решением которой служит $x = 2$.

ОТВЕТ: 2.

2 Подбор корня

Если $p(x)$ — многочлен, и x_0 — корень уравнения $p(x) = 0$, то имеет место разложение на множители¹:

$$p(x) = (x - x_0)q(x), \quad (1)$$

где $q(x)$ — также некоторый многочлен (степень которого, как легко видеть, на единицу меньше степени многочлена $p(x)$). Зная корень x_0 , мы получаем разложение (1) путём последовательной группировки слагаемых.

ЗАДАЧА 4. Решить уравнение $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$.

РЕШЕНИЕ. Нетрудно видеть, что непосредственная группировка ничего хорошего не даёт. Однако можно убедиться прямым вычислением, что $x = 2$ — корень данного уравнения, и поэтому левая часть должна иметь вид $(x - 2)q(x)$. Значит, нам нужно последовательно выделять слагаемые, дающие множитель $x - 2$:

$$x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = x^3 - 2x^2 - 7x^2 + 14x + 12x - 24 = x^2(x - 2) - 7x(x - 2) + 12(x - 2).$$

Теперь наше уравнение приобретает вид

$$(x - 2)(x^2 - 7x + 12) = 0$$

и легко решается.

ОТВЕТ: 2, 3, 4.

Всё это замечательно, но как подобрать корень? Никакой общей процедуры, к сожалению, не существует. Тем не менее, в важном частном случае уравнения с *целыми* коэффициентами имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА. Если уравнение

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0 \quad (2)$$

с целыми коэффициентами a_1, a_2, \dots, a_n имеет целочисленный корень x_0 , то x_0 является делителем свободного члена a_n .

¹Это следствие *теоремы Безу*, которая гласит, что остаток от деления многочлена $p(x)$ на $x - x_0$ равен $p(x_0)$; значит, если x_0 — корень многочлена $p(x)$, то указанный остаток равен нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку x_0 — корень данного уравнения, имеет место равенство

$$x_0^n + a_1x_0^{n-1} + a_2x_0^{n-2} + \dots + a_{n-1}x_0 + a_n = 0.$$

Отсюда

$$a_n = -x_0^n - a_1x_0^{n-1} - a_2x_0^{n-2} - \dots - a_{n-1}x_0.$$

Как видим, a_n делится на x_0 . Теорема доказана.

Вернёмся к уравнению $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$, рассмотренному выше. Делителями свободного члена -24 служат числа $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12$ и ± 24 . Все корни данного уравнения (а именно, 2, 3 и 4) являются целыми числами и находятся среди указанных делителей.

Поэтому, пытаясь решить уравнение (2), мы ищем его корень среди делителей свободного члена (поочерёдно подставляя эти делители в уравнение). Если нам повезёт и один из делителей в самом деле окажется корнем, то мы разложим левую часть (2) на множители и упростим задачу².

Теорема о целочисленном корне, сформулированная выше, относится к уравнению, в котором коэффициент при старшей степени x равен 1. А как быть в общем случае? Имеется соответствующее обобщение данной теоремы, но на практике можно обойтись и без него, просто умножая уравнение на подходящее число и вводя новую переменную.

ЗАДАЧА 5. Решить уравнение $2x^3 - 3x^2 - 5x + 3 = 0$.

РЕШЕНИЕ. Умножим уравнение на 4 (чтобы первое слагаемое стало точным кубом):

$$8x^3 - 12x^2 - 20x + 12 = 0,$$

после чего введём новую переменную $t = 2x$:

$$t^3 - 3t^2 - 10t + 12 = 0.$$

Непосредственно убеждаемся, что $t = 1$ — корень данного уравнения, и последовательно группируем:

$$\begin{aligned} t^3 - 3t^2 - 10t + 12 &= t^3 - t^2 - 2t^2 + 2t - 12t + 12 = \\ &= t^2(t - 1) - 2t(t - 1) - 12(t - 1) = (t - 1)(t^2 - 2t - 12). \end{aligned}$$

Отсюда получаем два других корня: $t = 1 \pm \sqrt{13}$, и остаётся лишь найти соответствующие значения x .

ОТВЕТ: $\frac{1}{2}, \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$.

3 Формулы Виета для кубического уравнения

Предположим, что кубическое уравнение

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \tag{3}$$

имеет три корня x_1, x_2 и x_3 . Тогда многочлен в левой части уравнения раскладывается на множители:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

²Но может случиться и так, что ни один делитель не подойдёт. Тогда уравнение (2) не имеет целочисленных корней, и придётся искать другие способы решить его. Такие ситуации будут рассмотрены в следующей статье «[Замена переменной](#)».

Раскроем в этом равенстве скобки и приведём подобные слагаемые:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = ax^3 - a(x_1 + x_2 + x_3)x^2 + a(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - ax_1x_2x_3. \quad (4)$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x , получаем:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}, \\ x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}. \end{cases} \quad (5)$$

Соотношения (5) называются *формулами Виета* для кубического уравнения (3).

4 Задачи

1. Решите уравнение:

а) $x^3 + 3x^2 - 5x - 15 = 0;$

в) $x^3 + 6x^2 - 12x - 8 = 0;$

б) $x^4 - 2x^3 - 3x + 6 = 0;$

г) $x^3 + 7x^2 + 21x + 27 = 0.$

$(a) -3, (b) 2, (c) -4, (d) 1, (e) 3$

2. Решите уравнение:

а) $2x^4 + 3x^3 + 16x + 24 = 0;$

в) $8x^3 - 6x^2 + 3x - 1 = 0;$

б) $24x^4 + 16x^3 - 3x - 2 = 0;$

г) $27x^3 - 15x^2 + 5x - 1 = 0.$

$(a) -2, (b) \frac{2}{3}, (c) \frac{1}{3}, (d) \frac{2}{3}, (e) \frac{1}{3}$
--

3. («Физтех», 2016, 9) Найдите значение выражения $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$, где a и b — соответственно наибольший и наименьший корни уравнения $x^3 - 7x^2 + 7x = 1$.

$\frac{1}{3}$

4. Решите уравнение:

а) $(x - 1)^3 + (2x + 3)^3 = 27x^3 + 8;$

в) $126x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0;$

б) $28x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0;$

г) $x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = 0.$

$(a) \frac{1}{3}, (b) \frac{2}{3}, (c) \frac{1}{3}, (d) \frac{2}{3}, (e) \frac{1}{3}$

5. Решите уравнение:

а) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0;$

в) $x^3 + x^2 + x - 3 = 0;$

д) $x^3 - 3x + 2 = 0;$

б) $x^3 - 13x - 12 = 0;$

г) $x^3 - 3x^2 + 4 = 0;$

е) $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0.$

$(a) 1, (b) 2, (c) 3, (d) 4, (e) 5$

6. Решите уравнение:

а) $x^3 + 3x^2 - 10x - 24 = 0$;

в) $x^3 - 2x^2 - x - 6 = 0$;

б) $x^3 - 4x^2 - 11x + 30 = 0$;

г) $x^3 + 5x^2 + 5x - 3 = 0$.

$\boxed{2^{\wedge} \mp 1 - '8 - (1 ; 8 (\pi ; 9 ; 8 - '2 (9 ; 4 - ; 8 ; 2 - (\pi$

7. Решите уравнение:

а) $x^4 + 3x^3 - 8x^2 - 12x + 16 = 0$;

б) $x^4 - 3x^3 + x^2 - x - 6 = 0$.

$\boxed{8 ' 1 - (9 ; 4 - '2 \mp ' 1 (\pi$

8. Решите уравнение:

а) $27x^3 + 9x^2 - 48x + 20 = 0$;

б) $2x^3 + x^2 + x - 1 = 0$;

в) $10x^3 - 3x^2 - 2x + 1 = 0$;

г) $4x^4 - 16x^3 + 3x^2 + 4x - 1 = 0$.

$\boxed{8^{\wedge} \mp 2 ' \frac{8}{1} \mp (1 ; \frac{7}{1} - (\pi ; \frac{7}{1} (9 ; \frac{8}{9} - ' \frac{8}{2} (\pi$

9. (МГУ, социологич. ф-т, 2004) Решить уравнение

$$\frac{x^3 + 7x^2 + 10x - 3(x^2 + 7x) - 30}{\sqrt{x + 2}} = 0.$$

$\boxed{8}$

10. (МГУ, ф-т почвоведения, 2005) Решить уравнение

$$(6x - 15)^7 = (x - 1)^{14}.$$

$\boxed{4}$

11. («Ломоносов», 2011, 8) Решите уравнение

$$\frac{x^7 - 1}{x^5 - 1} = \frac{x^5 - 1}{x^3 - 1}.$$

$\boxed{1 - ' 0}$

12. (Всеросс., 2017, МЭ, 11.1) Имеет ли отрицательные корни уравнение

$$x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 3x + 9 = 0?$$

13. («Пожори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11) Решите уравнение

$$(1 + x + x^2)(1 + x + x^2 + \dots + x^{10}) = (1 + x + x^2 + \dots + x^6)^2.$$

$\boxed{0 ' 1 -}$

14. («Физтех», 2013, 9–11) Найдите сумму всех действительных корней уравнения

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 35 = 0.$$

5–

15. («Покори Воробьёвы горы!», 2012, 10–11) Найдите количество общих точек графиков функций

$$y = x^3 + 6x \quad \text{и} \quad y = 12x^2 + 1,$$

а также абсциссы этих точек.

Одна точка с абсциссой $\frac{\sqrt[3]{4}-2}{1}$

16. («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 10–11) Какие значения может принимать выражение $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$, где x_1 и x_2 — несовпадающие между собой корни уравнения $x^3 - 2015x + 2016 = 0$?

2017

17. (Всеросс., 2019, ШЭ, 10.5) Дано положительное число a . Известно, что уравнение $x^3 + 1 = ax$ имеет ровно два положительных корня, и отношение большего из них к меньшему равно 2018. Уравнение $x^3 + 1 = ax^2$ также имеет ровно два положительных корня. Докажите, что отношение большего из них к меньшему также равно 2018.

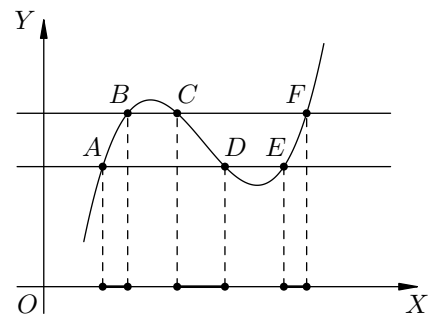
18. (ММО, 2018, 11.1) Решите уравнение

$$x^3 + (\log_2 5 + \log_3 2 + \log_5 3)x = (\log_2 3 + \log_3 5 + \log_5 2)x^2 + 1.$$

19. (Всеросс., 1998, финал, 10) Прямые, параллельные оси OX , пересекают график функции

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d :$$

первая — в точках A , D и E , вторая — в точках B , C и F (см. рисунок). Докажите, что длина проекции дуги CD на ось OX равна сумме длин проекций дуг AB и EF .



20. («Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11) Найдите сумму $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$, если известно, что три различных действительных числа x , y и z удовлетворяют условиям:

$$x^3 + 1009 = 2018x, \quad y^3 + 1009 = 2018y, \quad z^3 + 1009 = 2018z$$

7

21. (ММО, 2016, 10.3) Уравнение с целыми коэффициентами $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ имеет четыре положительных корня с учётом кратности. Найдите наименьшее возможное значение коэффициента b при этих условиях.

9

22. («Ломоносов», 2014, 8–9) Известно, что x_1, x_2, x_3 — различные корни уравнения

$$x^3 - x - 1 = 0.$$

Составьте уравнение наименьшей степени, корнями которого являются числа $\frac{x_1+1}{x_1-1}, \frac{x_2+1}{x_2-1}$ и $\frac{x_3+1}{x_3-1}$.

$$\boxed{0 = 1 - t - \varepsilon^2 t - \varepsilon^4 t}$$

23. («Ломоносов», 2012, 10–11) Найдите сумму квадратов всех действительных корней уравнения

$$x^5 + 2010x^2 + 2011 = x^4 + 2011x^3 + 2012x.$$

$$\boxed{4025}$$

24. (ММО, 2011, 11.2) Сравните между собой наименьшие положительные корни многочленов

$$x^{2011} + 2011x - 1 \quad \text{и} \quad x^{2011} - 2011x + 1.$$

25. (ММО, 2017, 11.3) Пусть x_0 — положительный корень уравнения $x^{2017} - x - 1 = 0$, а y_0 — положительный корень уравнения $y^{4034} - y = 3x_0$.

а) Сравните x_0 и y_0 .

б) Найдите десятый знак после запятой числа $|x_0 - y_0|$.