Графы

1. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 5–6.6, 7–8.5, 9.4*) В Империи Вестероса было 1000 городов и 2017 дорог (каждая дорога соединяет какие-то два города). Из каждого города можно было проехать в каждый. Однажды злой волшебник заколдовал N дорог, и ездить по ним стало нельзя. Образовалось 7 королевств, так, что в каждом королевстве можно добраться из любого города в любой по дорогам, а из одного королевства в другое по дорогам добраться нельзя. При каком наибольшем N это возможно?

2. (*«Ломоносов», 2016, 7–9*) В одном интернет-сообществе каждый из участников имеет ровно 22 друга (дружба обоюдная). При этом если два члена сети дружат, то у них нет общих друзей, а если не дружат, то у них ровно 6 общих друзей. Сколько человек в этом интернет-сообществе?

100

3. (*«Курчатов», 2019, 9*) На вечеринке собралось 24 человека. Гость считается интровертом, если у него не более трех знакомых среди остальных гостей. Оказалось, что у каждого гостя не менее трех знакомых-интровертов. Какое количество интровертов могло быть на вечеринке? Приведите все ответы и докажите, что других нет.

24

4. (*Всеросс., 2019, ШЭ, 9.6*) В стране 100 городов. Между любыми двумя городами либо нет соединения, либо налажено авиасообщение, либо есть железная дорога (одновременно и авиасообщения, и железной дороги быть не может). Известно, что если два города соединены с третьим железной дорогой, то между ними есть авиалиния, а если два города соединены с третьим авиалиниями, то между ними есть железная дорога. Из-за стихийного бедствия отменили все авиарейсы в стране. Правительство постановило в некоторых городах разместить центры гуманитарной помощи, причём так, чтобы из каждого города можно было добраться в подобный центр. Докажите, что необходимо открыть хотя бы 20 таких центров.

5. В графе n вершин, степень каждой вершины равна p. Известно, что любые две несмежные вершины имеют a общих соседей, а любые две смежные вершины имеют b общих соседей. Докажите, что $(n - p - 1)a = p(p - b - 1)$.

6. (*«Курчатов», 2017, 8.5*) В математическом конкурсе участвуют 14 школьников. Участникам конкурса было предложено 6 задач. В результате каждую задачу правильно решили больше половины школьников. Докажите, что обязательно найдётся пара участников, которые в объединении правильно решили все задачи.

7. (*Олимпиада им. Эйлера, РЭ, 2018.5*) В Тридесятом царстве из каждого города выходит по 30 дорог, причём каждая дорога соединяет два города, не проходя через другие города. Тридесятый царь захотел разместить в некоторых городах по дорожно-эксплуатационному управлению (ДЭУ), обслуживающему все выходящие из города дороги, так, чтобы каждая дорога обслуживалась хотя бы одним управлением и управления были размещены не более чем в половине городов. Может ли так оказаться, что у царя существует ровно 2018 способов сделать это?

8. (*Олимпиада им. Эйлера, финал, 2018.7*) Из клетчатой доски размером 70×70 вырезали 2018 клеток. Докажите, что доска распалась не более чем на 2018 кусков. Два куска, не имеющие общих точек кроме вершин клеток, считаются не соединёнными друг с другом.

9. (*Олимпиада им. Эйлера, 2015, финал*) В стране Графинии n ($n \geqslant 2$) городов. Некоторые города соединены беспосадочными авиалиниями (по каждой авиалинии выполняются рейсы в обоих направлениях) таким образом, что из любого города можно самолётами (возможно, с пересадками) добраться до любого другого, но закрытие любой авиалинии нарушает это свойство. При этом из любого города выходит не больше d авиалиний. Докажите, что все города Графинии можно разбить не более чем на $\frac{n}{2} + d$ групп таким образом, чтобы каждая авиалиния соединяла города из разных групп и для любых двух групп существовало не более одной авиалинии, соединяющей города из этих групп.

10. (*Олимпиада им. Эйлера, 2016, финал*) В стране Эйлерии 101 город. Каждые два города соединены двусторонним беспосадочным рейсом одной из 99 авиакомпаний. Известно, что из каждого города выходят рейсы всех 99 компаний. Назовём *треугольником* три города, попарно соединённых рейсами одной и той же компании. Докажите, что в Эйлерии не больше одного треугольника.

11. (*«Высшая проба», 2017, 7–8.6, 9.1*) Каждый член партии доверяет пяти однопартийцам, но никакие двое не доверяют друг другу. При каком минимальном размере партии такое возможно?

Не забудьте показать, что при указанном Вами размере партии это действительно возможно, а при меньших — нет.

12. (*«Высшая проба», 2017, 10-11.1*) В компании из 6 человек некоторые компаниями по трое ходили вместе в походы. Верно ли, что среди них найдутся четверо, среди которых каждые трое ходили вместе в поход, либо четверо, где никакие трое не ходили вместе в поход?

13. (*Всеросс., 2017, финал, 9.1*) В стране некоторые пары городов соединены односторонними прямыми авиарейсами (между любыми двумя городами есть не более одного рейса). Скажем, что город A *доступен* для города B, если из B можно долететь в A, возможно, с пересадками. Известно, что для любых двух городов P и Q существует город R, для которого и P, и Q доступны. Докажите, что существует город, для которого доступны все города страны. (Считается, что из города можно долететь до него самого.)

14. (*Открытая олимпиада ИТМО, 2016, 11*) В городе Джентльвилле живут 15 джентльменов, любые двое из которых либо дружат, либо враждуют. В какой-то момент каждый джентльмен попросил каждого из своих друзей послать открытку ненависти каждому из своих врагов (джентльмен A просит джентльмена B послать открытку всем врагам джентльмена B). Каждый из джентльменов выполнил все просьбы; при этом он посылал каждому из своих врагов такое количество открыток, сколько раз его об этом просили. Какое наибольшее количество открыток могло быть послано?

15. (*Всеросс., 2018, РЭ, 9.10; 11.9*) В компании 100 детей, некоторые дети дружат (дружба всегда взаимна). Известно, что при выделении любого ребёнка оставшихся 99 детей можно разбить на 33 группы по три человека так, чтобы в каждой группе все трое попарно дружили. Найдите наименьшее возможное количество пар дружащих детей.

16. (*Всеросс., 2019, финал, 9.4*) В лагерь приехали 10000 детей, каждый дружит ровно с 11 другими детьми в лагере (дружба взаимна). Каждый ребёнок носит футболку одного из семи цветов радуги, причём у любых двух друзей цвета различны. Вожатые потребовали, чтобы какие-нибудь дети (хотя бы один) надели футболки других цветов (из тех же семи). Опрос показал, что 100 детей менять цвет не намерены. Докажите, что некоторые из остальных детей всё же могут изменить цвета своих футболок так, чтобы по-прежнему у любых двух друзей цвета были различны.

17. (*Турнир городов, 2016, 10–11*) В стране 64 города, некоторые пары из них соединены дорогой, но нам неизвестно, какие именно. Мы можем выбрать любую пару городов и получить ответ на вопрос «есть ли дорога между ними?». Мы хотим узнать, можно ли в этой стране добраться от любого города до любого другого, двигаясь по дорогам. Докажите, что не существует алгоритма, позволяющего сделать это менее чем за 2016 вопросов.

18. (*ММО, 2014, 10.4*) Дано несколько белых и несколько чёрных точек. Из каждой белой точки идет стрелка в каждую чёрную, на каждой стрелке написано натуральное число. Известно, что если пройти по любому замкнутому маршруту, то произведение чисел на стрелках, идущих по направлению движения, равно произведению чисел на стрелках, идущих против направления движения. Обязательно ли тогда можно поставить в каждой точке натуральное число так, чтобы число на каждой стрелке равнялось произведению чисел на ее концах?

19. (*ММО, 2016, 11.6*) С левого берега реки на правый с помощью одной лодки переправились N туземцев, каждый раз плавая направо вдвоем, а обратно — в одиночку. Изначально каждый знал по одному анекдоту, каждый — свой. На берегах они анекдотов не рассказывали, но в лодке каждый рассказывал попутчику все известные ему на данный момент анекдоты. Для каждого натурального k найдите наименьшее возможное значение N, при котором могло случиться так, что в конце каждый туземец знал, кроме своего, ещё не менее чем k анекдотов.

$\boxed{2k}$

20. (*ММО, 2017, 10–11.6*) В Чикаго орудует 36 преступных банд, некоторые из которых враждуют между собой. Каждый гангстер состоит в нескольких бандах, причём любые два гангстера состоят в разных наборах банд. Известно, что ни один гангстер не состоит в двух бандах, враждующих между собой. Кроме того, оказалось, что каждая банда, в которой не состоит некоторый гангстер, враждует с какой-то бандой, в которой данный гангстер состоит. Какое наибольшее количество гангстеров может быть в Чикаго?

21. (*ММО, 2018, 11.6*) В доме из 2^n комнат сделали евроремонт. При этом выключатели света оказались перепутанными, так что при включении выключателя в одной комнате загорается лампочка, вообще говоря, в какой-то другой комнате. Чтобы узнать, какой выключатель к какой комнате подсоединён, прораб посылает несколько людей в какие-то комнаты, чтобы те, одновременно включив там выключатели, вернулись и сообщили ему, горела лампочка в их комнате или нет.

а) Докажите, что за $2n$ таких посылок прораб может установить соответствие между выключателями и комнатами.

б) А может ли он обойтись $2n - 1$ такими посылками?

22. Число рёбер графа не меньше числа вершин. Докажите, что в этом графе существует цикл.

23. В графе n вершин ($n \geqslant 2$). Докажите, что можно покрасить не более $n-1$ его рёбер так, чтобы из каждой вершины выходило чётное число неокрашенных рёбер.

24. (*Всеросс., 2014, РЭ, 10–11.8*) Петя поставил на доску 50×50 несколько фишек, в каждую клетку — не больше одной. Докажите, что Вася может поставить на свободные поля этой же доски не более 99 новых фишек (возможно, ни одной) так, чтобы по-прежнему в каждой клетке стояло не больше одной фишки, и в каждой строке и каждом столбце этой доски оказалось чётное количество фишек.

25. Ориентированный граф без петель удовлетворяет условию

$$\text{если } a \to b \text{ и } b \to c, \text{ то } a \to c$$

(запись $x \to y$ означает, что из вершины x в вершину y идёт стрелка). Докажите, что вершины графа можно занумеровать таким образом, чтобы любая стрелка шла от вершины с меньшим номером к вершине с бóльшим номером.

26. (*Всеросс., 2015, финал, 10.3*) На соревнованиях по фигурному велосипедированию было 100 судей. Каждый судья упорядочил всех участников (от лучшего по его мнению — к худшему). Оказалось, что ни для каких трёх участников A, B, C не нашлось трёх судей, один из которых считает, что A — лучший из трёх, а B — худший, другой — что B лучший, а C худший, а третий — что C лучший, а A худший. Докажите, что можно составить общий рейтинг участников так, чтобы для любых двух участников A и B тот, кто выше в рейтинге, был бы лучше другого по мнению хотя бы половины судей.