

Параметры. Графики

Данный листок посвящён задачам с параметрами, в которых существенную помощь оказывает построение графиков функций или областей на координатной плоскости.

1. («Физтех», 2017, 9) Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} 3|y| - 4|x| = 6, \\ x^2 + y^2 - 14y + 49 - a^2 = 0 \end{cases}$$

- а) имеет ровно три решения; б) имеет ровно два решения.

$$\boxed{\{6; 9\} \cap \{8; 7\} \cap \{9; -6\} \cap \{9; 6; 7; 5; 7\} \cap \{8\}}$$

2. («Физтех», 2017, 9) Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} 4|x| + 3|y| = 12, \\ x^2 + y^2 - 2x + 1 - a^2 = 0 \end{cases}$$

- а) имеет ровно три решения; б) имеет ровно два решения.

$$\boxed{\left\{ \frac{21}{8} \wedge \mp; \frac{9}{8} \mp \right\} \cap \left(\frac{5}{91}; 7 \right) \cap \left(7 -; \frac{5}{91} - \right) \cap \{9; 7; 2\} \cap \{8\}}$$

3. («Физтех», 2016, 9) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$a|2 - x| + \frac{x^2 - x - 6}{3 - x} = 0$$

имеет ровно одно решение.

$$\boxed{\{9\} \cap \{1; 1\}}$$

4. («Ломоносов», 2008) При каких значениях a существует единственное решение системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ (x - 3)^2 + (y + 4)^2 = a? \end{cases}$$

$$\boxed{9; 49}$$

5. («Физтех», 2016, 10–11) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (|y + 9| + |x + 2| - 2)(x^2 + y^2 - 3) = 0, \\ (x + 2)^2 + (y + 4)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

$$\boxed{9; 23 + 4\sqrt{15}}$$

6. (ОММО, 2014) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $|\ln|x|| = ax$ имеет три решения.

$$\boxed{\left(\frac{e}{1}; 0 \right) \cap \left(0; \frac{e}{1} - \right)}$$

7. (ОММО, 2015, 11) При каких значениях параметра a уравнение

$$\ln(x - 2a) - 3(x - 2a)^2 + 2a = 0$$

имеет единственный корень?

$$\left[\frac{7}{9} ; 1 \right]$$

8. («Физтех», 2012) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - a^2 \leq 2x - 4y - 5, \\ x^2 + y^2 - 9a^2 \leq 8y - 14x - 61 + 12a \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

$$\{2, 3\}$$

9. («Физтех», 2015, 10–11) Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся такое число b , что система

$$\begin{cases} y = x^2 - a, \\ x^2 + y^2 + 8b^2 = 4b(y - x) + 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение (x, y) .

$$\left(\infty + ; \frac{7}{1} - \sqrt{\wedge} - \right]$$

10. («Физтех», 2015, 10–11) Найдите все значения параметра b , для каждого из которых найдётся число a такое, что система

$$\begin{cases} x = |y - b| + \frac{3}{b}, \\ x^2 + y^2 + 32 = a(2y - a) + 12x \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение (x, y) .

$$\left(\infty + ; \frac{8}{8} \right] \cap (0 ; \infty -)$$

11. («Физтех», 2015, 10) Найдите все значения параметра b , для каждого из которых найдётся число a такое, что система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2b(b - x + y) = 4, \\ y = \frac{9}{(x + a)^2 + 1} \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение (x, y) .

$$\{2 ; \Pi - \}$$

12. («Физтех», 2015, 11) Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся число b такое, что система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2a(a + y - x) = 49, \\ y = 15 \cos(x - b) - 8 \sin(x - b) \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение (x, y) .

[47;47-]

13. («Физтех», 2019, 11) Окружность, центр которой лежит на прямой $y = b$, пересекает параболу $y = \frac{3}{4}x^2$ хотя бы в трёх точках; одна из этих точек — начало координат, а две из оставшихся лежат на прямой $y = \frac{3}{4}x + b$. Найдите все значения b , при которых описанная конфигурация возможна.

$\frac{21}{25} = q$

14. («Физтех», 2019, 11) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых у системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 26(y \sin 2a - x \cos 2a), \\ x^2 + y^2 = 26(y \cos 3a - x \sin 3a) \end{cases}$$

существуют два решения $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ такие, что расстояние между точками $P(x_1; y_1)$ и $Q(x_2; y_2)$ равно 10.

$Z \ni u \text{ ар1} ; \frac{6}{u^2} + \frac{01}{x} ; \frac{6}{u^2} + \frac{6}{1} \text{ ар1} \frac{6}{2} \mp \frac{01}{x} = v$

15. («Покори Воробьёвы горы!», 2013, 10–11) При каких значениях параметра a площадь фигуры, заданной на плоскости (x, y) системой

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2ax - ay \leq 1 - \frac{5a^2}{4}, \\ y^2 + 4xy + 4x^2 \leq 25a^2, \end{cases}$$

максимальна?

$\frac{6^{\wedge}}{2} \leq |v|$

16. («Ломоносов», 2012, 10–11) Найдите все значения $a > 0$, при каждом из которых из неравенства $x^2 + y^2 \leq a$ следует неравенство $(|x| + 4)(|y| + 4) \leq 49$.

[81;0]

17. («Покори Воробьёвы горы!», 2013, 10–11) Найдите все значения a , при каждом из которых для любого значения b система

$$\begin{cases} (x + 1)^2 + (|y - 1| - 1)^2 = 4, \\ y = b|x + 2| + a \end{cases}$$

имеет решения.

$[6^{\wedge} + 2; 6^{\wedge} -]$

18. («Покори Воробьёвы горы!», 2013, 10–11) Найти все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y| + |y - x| \leq a - |x - 1|, \\ (y - 4)(y + 3) \geq (4 - x)(3 + x) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

L = v

19. (ОММО, 2012) При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} |x| + |y| + ||x| - |y|| = 6, \\ |x| + |y| = a \end{cases}$$

имеет наибольшее возможное число решений?

(9:3)

20. («Физтех», 2013) При каких значениях параметра a существует единственная пара чисел (x, y) , удовлетворяющая системе неравенств

$$\begin{cases} (x^2 - xy + 3y^2)(y^2 - 25) \geq 0, \\ |x + 2 + y| + |y + 2 - x| \leq a? \end{cases}$$

(9:4)

21. («Физтех», 2013) При каких значениях параметра a существует единственная пара чисел (x, y) , удовлетворяющая системе

$$\begin{cases} (3x^2 + 3xy + 2y^2)(|x + y| - 8) \geq 0, \\ x(x - 4) + y(y - 2) = a? \end{cases}$$

7/15, 0

22. («Физтех», 2010) Найдите все значения параметра a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} |x| + |x + 2| - 2y = 0, \\ x^2 + 2x + y^2 - 2ay = -2a \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

2 + √2

23. («Физтех», 2011) Найдите все значения параметра b , при которых система уравнений

$$\begin{cases} x = |b + y^2|, \\ y = a(x - b^2) \end{cases}$$

имеет решение при любом значении параметра a .

(∞ =: 1] ∩ [0:∞-)

24. («Физтех», 2009) Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 17 \leq 6(|x| + |y|), \\ x^2 + y^2 + 2x = a^2 - 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

$$\boxed{[9; 1 - \sqrt{17}] \cap [\sqrt{17} - 1; 9]}$$

25. («Физтех», 2007) Найти все значения параметра a , при которых существует ровно две пары действительных чисел (x, y) , удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} (y + 8 - x^2)(2x + |y|) = 0, \\ 2ax - y = 8 + a^2. \end{cases}$$

$$\boxed{(1; 1] \cap \{2, -4, -1\}}$$

26. («Ломоносов», 2015, 10–11) Найдите наибольшее значение $x + y$, если числа x и y удовлетворяют неравенству

$$\log_{\frac{x^2+y^2}{2}} y \geq 1.$$

$$\boxed{\sqrt{2} + 1}$$

27. («Покори Воробьёвы горы!», 2013, 10–11) Найдите множество значений выражения $x - y + 1$ при условии

$$(x - y)^2 = 2|2y - x| + x + 15.$$

$$\boxed{(\infty + ; 9] \cap [2 - ; \infty -)}$$

28. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 10–11) На координатной плоскости изобразите множество точек (a, b) , для каждой из которой область определения функции

$$f(x) = \log_{\frac{2a-b-x}{2a-b+x}} \left(\frac{x-a-b}{x+a+b} \right)$$

не содержит ни одной точки из отрезка $[1; 2]$

29. («Физтех», 2017, 11) Найдите все значения параметра b такие, что система

$$\begin{cases} x \cos a + y \sin a - 2 \leq 0, \\ x^2 + y^2 + 6x - 2y - b^2 + 4b + 6 = 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение при любом значении параметра a .

$$\boxed{(\infty + ; 0\sqrt{17}] \cap [0\sqrt{17} - \sqrt{17}; \infty -)}$$

30. («Физтех», 2017, 11) Найдите все значения параметра a , при которых существует значение параметра b такое, что система

$$\begin{cases} \arcsin\left(\frac{a-y}{3}\right) = \arcsin\left(\frac{4-x}{4}\right), \\ x^2 + y^2 - 8x - 8y = b \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

$$\left(\frac{8}{25}; \frac{8}{13}\right)$$

31. («Покори Воробьёвы горы!», 2014) Найдите все отрицательные a , при которых уравнение

$$\frac{6\pi a - \arcsin(\sin x) + 2 \arccos(\cos x) - ax}{\operatorname{tg}^2 x + 4} = 0$$

имеет ровно три решения, принадлежащих множеству $[\pi; +\infty)$.

$$\frac{5}{3} - \frac{5}{2} - \frac{5}{1}$$

32. (МГУ, ф-т психологии, 2004) Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$|x^2 - 5|x|| = a(x + 4)$$

имеет ровно три различных решения.

$$1; 0$$

33. («Физтех», 2016, 11) Дана система уравнений

$$\begin{cases} |9 + 8y - x^2 - y^2| + |8y| = 16y + 9 - x^2 - y^2, \\ (a + 4)x - 13y + a = 0. \end{cases}$$

а) Изобразите на плоскости (x, y) множество точек, удовлетворяющих первому уравнению системы, и найдите площадь полученной фигуры.

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система имеет ровно одно решение.

$$12 + 25\pi - 25 \arcsin \frac{5}{3}; 6, -6, -3$$

34. («Физтех», 2016, 11) Дана система уравнений

$$\begin{cases} |15x| + |8y| + |120 - 15x - 8y| = 120, \\ \left(x - 4 \cos \frac{a\pi}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{15}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+2}{4}\right)^2. \end{cases}$$

а) Изобразите на плоскости (x, y) множество точек, удовлетворяющих первому уравнению системы, и найдите площадь полученной фигуры.

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система имеет ровно три решения.

$$28; 69; 6; 9; 36; 28$$

35. (ОММО, 2010) Изобразите на координатной плоскости множество точек (a, b) таких, что система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ x + y = b \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

$$|p|z \wedge \geq |q|$$