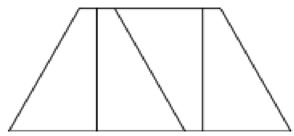
Геометрия–7. Разное

Данный листок содержит разные задачи по геометрии, которые предлагались на различных олимпиадах в 7 классе (или в которых достаточно знаний 7 класса).

1. (*Математический праздник, 1990, 6–7.2*) Изобразите множество середин всех отрезков, концы которых лежат а) на данной полуокружности; б) на диагоналях данного квадрата.

2. (*«Курчатов», 2018, 7.3*) На сторонах AB, BC треугольника ABC отмечены точки X и Y соответственно так, что $AY = AB$ и $CX = CB$. Прямая, проходящая через вершину A параллельно стороне BC, пересекает прямую, проходящую через вершину C параллельно стороне AB, в точке D. Докажите, что $DX = DY$.

3. (*Математический праздник, 1997, 7.3*) Четырёхугольник с длинами сторон 1, 1, 1 и 2 имеет две параллельные стороны и разбит на четыре одинаковые фигуры (см. рисунок). В результате верхняя сторона разделилась на четыре отрезка. Найдите отношение длины большего отрезка к меньшему.



$\boxed{5}$

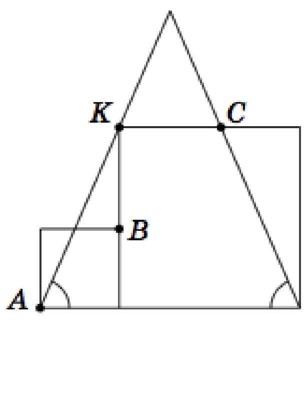
4. (*«Ломоносов», 2013, 7.3*) Дан параллелограмм $ABCD$ и выбраны точки A_1, B_1, C_1 и D_1 такие, что точка A является серединой отрезка DD_1, точка B — серединой AA_1, точка C — серединой BB_1 и точка D — серединой CC_1. Докажите, что четырёхугольник $A_1B_1C_1D_1$ является параллелограммом.

5. (*«Ломоносов», 2019, 7–8.3*) В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведены биссектриса BD и высота CH. Из вершины C на биссектрису BD опущен перпендикуляр CK. Найдите угол HCK, если $BK : KD = 3 : 1$.

$\boxed{30^\circ}$

6. (*Математический праздник, 1993, 7.4*) В результате измерения четырёх сторон и одной из диагоналей некоторого четырёхугольника получились числа: 1; 2; 2,8; 5; 7,5. Чему равна длина измеренной диагонали?

7. (*Математический праздник, 2018, 7.4*) Два квадрата и равнобедренный треугольник расположены так, как показано на рисунке (вершина K большого квадрата лежит на стороне треугольника). Докажите, что точки A, B и C лежат на одной прямой.

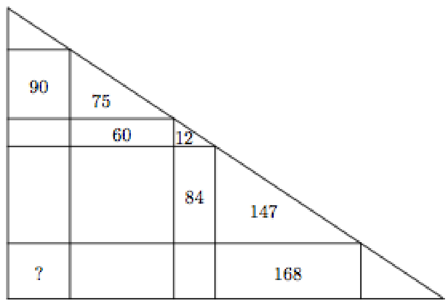


8. (*Московская устная олимпиада, 2019, 7.5*) Прямоугольный лист бумаги согнули по диагонали. Может ли периметр полученного пятиугольника оказаться равным периметру исходного листа?

9. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2013, 7*) Дан угол с вершиной O_1. Провели окружность с центром в точке O_1, она пересекает стороны угла в точках A и B. Потом провели касательные к окружности в точках A и B, они пересеклись в точке O_2. Построили вторую окружность, с центром O_2 и радиусом O_2A, и провели касательные в точках A и B. Эти касательные пересекаются в точке O_3. Затем построили окружность с центром O_3, и так далее. Так проделали 1001 раз. Найдите угол $AO_{1001}B$, если $\angle AO_1B = 60°$.

$\boxed{60°}$

10. (*«Ломоносов», 2012, 7*) Прямоугольный треугольник разбили на несколько фигур так, как показано на рисунке. Зная указанные площади фигур, найдите площадь прямоугольника в левом нижнем углу.



$\boxed{72}$

11. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 7*) Леночка собралась испечь пирог на день рождения. Она раскатала тесто равномерным слоем в виде равнобедренного прямоугольного треугольника. Потом она подумала, что теста хватит на два пирога, и провела из точки на гипотенузе два прямолинейных разреза, параллельных катетам треугольника. Получилось два треугольника и один прямоугольник.

Из прямоугольника Леночка испекла пирог с клубникой, а треугольники слепила вместе, раскатала и испекла пирог с капустой. Может ли получиться так, что в пироге с клубникой теста больше, чем в пироге с капустой?

$\boxed{\text{Нет}}$

12. (*Всеросс., 2014, МЭ, 8*) На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ отмечены точки M и K соответственно так, что $\angle BAM = \angle CKM = 30°$. Найдите $\angle AKD$.

$\boxed{75°}$

13. (*«Ломоносов», 2014, 10–11*) Треугольник LOM с углом $\angle LOM = 51°$ повернули на некоторый острый угол вокруг точки O. При этом точка L переходит в точку N, лежащую на стороне LM, а точка M — в такую точку K, что $OM \perp NK$. Найдите угол поворота.

$\boxed{34°}$

14. (*ОММО, 2014*) В треугольнике ABC длина стороны AB равна 2, угол A равен $60°$, угол B равен $70°$. На стороне AC взята точка D так, что $AD = 1$. Найдите угол DBC.

$\boxed{40°}$

15. (*«Высшая проба», 2014, 7*) На стороне BC неравнобедренного треугольника ABC выбрали точку D. Оказалось, что каждый из треугольников ABD и ACD — равнобедренный, а один из них ещё и прямоугольный. Найдите величину наименьшего из углов треугольника ABC.

$\boxed{22{,}5°}$

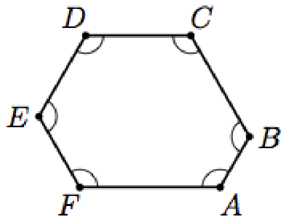
16. (*«Высшая проба», 2014, 7*) В прямоугольном треугольнике произведение высот в два раза меньше произведения сторон. Найдите наименьший угол этого треугольника.

$\boxed{45°}$

17. (*«Курчатов», 2019, 7.4*) На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки X и Y соответственно так, что $\angle AYB = \angle AXC = 134°$. На луче YB за точку B отметили точку M, а на луче XC за точку C отметили точку N. Оказалось, что $MB = AC$, $AB = CN$. Найдите $\angle MAN$.

$\boxed{46°}$

18. (*«Курчатов», 2017, 7.5*) Все углы шестиугольника $ABCDEF$ равны.



Докажите, что $AB - DE = EF - BC = CD - FA$.

19. (*«Высшая проба», 2018, 7.2*) На плоскости есть набор из 2018 точек, никакие 3 не лежат на одной прямой. Рассмотрим все замкнутые ломаные, проходящие через все точки набора. Сколько точек самопересечения может иметь ломаная минимальной длины?

20. (*«Высшая проба», 2018, 7–8.4*) Пусть дан четырехугольник $ACDE$, такой что вершины D и E лежат по одну сторону от прямой AC. Пусть на стороне AC взята точка B, так что треугольник BCD — равнобедренный с основанием BC, т. е. $BD = CD$. Пусть углы BDC, ABE, ADE равны 80 градусов. Найдите угол EAD.

$\boxed{50°}$

21. (*«Высшая проба», 2019, 7.4*) В треугольнике ABC, в котором все три стороны попарно различны, проведены биссектрисы углов A и B, делящие его на четырехугольник и три треугольника, два из которых равнобедренные. Найдите углы исходного треугольника.

$\boxed{4\pi/7,\ 2\pi/7,\ \pi/7}$

22. (*Московская устная олимпиада, 2018, 7.8*) Точка M — середина стороны BC треугольника ABC. Из вершины C опущен перпендикуляр CL на прямую AM (L лежит между A и M). На отрезке AM отмечена точка K так, что $AK = 2LM$. Докажите, что $\angle BKM = \angle CAM$.

23. (*Московская устная олимпиада, 2019, 7.8*) Внутри треугольника ABC отмечена точка P так, что сумма углов ABC и APC равна $180°$ и $CP = AB$. Докажите, что $\angle CAP < 60°$.