# Геометрия на ММО. 11 класс

Данный листок содержит задачи по геометрии, которые предлагались на Московской математической олимпиаде в 11 классе.

Принцип нумерации задач: номер **16.3** означает, что задача предлагалась в 2016 году под номером 3 (чем больше номер задачи, тем она обычно сложнее).

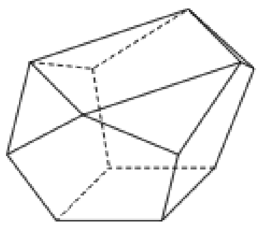
**17.2.** На вписанной окружности треугольника $ABC$, касающейся стороны $AC$ в точке $S$, нашлась такая точка $Q$, что середины отрезков $AQ$ и $QC$ также лежат на вписанной окружности. Докажите, что $QS$ — биссектриса угла $AQC$.

**10.2.** В квадратной песочнице, засыпанной ровным слоем песка высотой 1, Маша и Паша делали куличи при помощи цилиндрического ведёрка высоты 2. У Маши все куличи удались, а у Паши — рассыпались и превратились в конусы той же высоты. В итоге весь песок ушёл на куличи, поставленные на дне песочницы отдельно друг от друга. Чьих куличей оказалось в песочнице больше: Машиных или Пашиных?

**09.2** Моток ниток проткнули насквозь 72 цилиндрическими спицами радиуса 1 каждая, в результате чего он приобрёл форму цилиндра радиуса 6. Могла ли высота этого цилиндра оказаться также равной 6?

**19.3.** В остроугольном треугольнике $ABC$ проведены высоты $AA'$ и $BB'$. Точка $O$ — центр окружности, описанной около треугольника $ABC$. Докажите, что расстояние от точки $A'$ до прямой $BO$ равно расстоянию от точки $B'$ до прямой $AO$.

**19.3.** У многогранника, изображенного на рисунке, грани — четыре правильных пятиугольника, четыре треугольника и два квадрата. Во сколько раз сторона верхнего квадрата больше стороны нижнего?



**16.3.** Внутри трапеции $ABCD$ с основаниями $AD$ и $BC$ отмечены точки $M$ и $N$ так, что $AM = CN$ и $BM = DN$, а четырёхугольники $AMND$ и $BMNC$ — вписанные. Докажите, что прямая $MN$ параллельна основаниям трапеции.

**16.3.** Можно ли отметить $k$ вершин правильного 14-угольника так, что каждый четырёхугольник с вершинами в отмеченных точках, имеющий две параллельные стороны, является прямоугольником, если: а) $k = 6$; б) $k \geqslant 7$?

**15.3.** На основании $AC$ равнобедренного треугольника $ABC$ взяли произвольную точку $X$, а на боковых сторонах — точки $P$ и $Q$ так, что $XPBQ$ — параллелограмм. Докажите, что точка $Y$, симметричная точке $X$ относительно $PQ$, лежит на описанной окружности треугольника $ABC$.

**14.3.** На сторонах $AD$ и $CD$ параллелограмма $ABCD$ с центром $O$ отмечены такие точки $P$ и $Q$ соответственно, что $\angle AOP = \angle COQ = \angle ABC$.

а) Докажите, что $\angle ABP = \angle CBQ$.

б) Докажите, что прямые $AQ$ и $CP$ пересекаются на описанной окружности треугольника $ABC$.

**13.3.** Дан такой выпуклый четырёхугольник $ABCD$, что $AB = BC$ и $AD = DC$. Точки $K$, $L$ и $M$ — середины отрезков $AB$, $CD$ и $AC$ соответственно. Перпендикуляр, проведённый из точки $A$ к прямой $BC$, пересекается с перпендикуляром, проведённым из точки $C$ к прямой $AD$, в точке $H$. Докажите, что прямые $KL$ и $HM$ перпендикулярны.

**12.3.** В треугольнике $ABC$ высоты или их продолжения пересекаются в точке $H$, а $R$ — радиус описанной около него окружности. Докажите, что если $\angle A \leqslant \angle B \leqslant \angle C$, то $AH + BH \geqslant 2R$.

**11.3.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ на основании $BC$ взята точка $D$, а на боковой стороне $AB$ — точки $E$ и $M$ так, что $AM = ME$ и отрезок $DM$ параллелен стороне $AC$. Докажите, что $AD + DE > AB + BE$.

**11.3.** Внутри треугольника $ABC$ взята такая точка $O$, что $\angle ABO = \angle CAO$, $\angle BAO = \angle BCO$, $\angle BOC = 90°$. Найдите отношение $AC : OC$.

**18.4.** В остроугольном треугольнике $ABC$ проведены высоты $AA_1$ и $CC_1$. Окружность, описанная вокруг треугольника $A_1BC_1$, проходит через точку $M$ пересечения медиан. Найдите все возможные значения величины угла $B$.

**17.4.** Внутри треугольника $ABC$ взята такая точка $D$, что $BD = CD$, $\angle BDC = 120°$. Вне треугольника $ABC$ взята такая точка $E$, что $AE = CE$, $\angle AEC = 60°$ и точки $B$ и $E$ находятся в разных полуплоскостях относительно $AC$. Докажите, что $\angle AFD = 90°$, где $F$ — середина отрезка $BE$.

**12.4.** После обеда на *прозрачной* квадратной скатерти остались тёмные пятна общей площади $S$. Оказалось, что если сложить скатерть пополам вдоль любой из двух линий, соединяющих середины противоположных её сторон, или же вдоль одной из двух её диагоналей, то общая видимая площадь пятен будет равна $S_1$. Если же сложить скатерть пополам вдоль другой её диагонали, то общая видимая площадь пятен останется равна $S$. Какое наименьшее значение может принимать величина $S_1 : S$?

**09.4** Через каждую вершину четырёхугольника проведена прямая, проходящая через центр вписанной в него окружности. Три из этих прямых обладают тем свойством, что каждая из них делит площадь четырёхугольника на две равновеликие части.

а) Докажите, что и четвёртая прямая обладает тем же свойством.

б) Какие значения могут принимать углы этого четырёхугольника, если один из них равен $72°$?

**18.5.** На сторонах выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ во внешнюю сторону построены правильные треугольники $ABC_1$, $BCD_1$, $CDE_1$, $DEF_1$, $EFA_1$ и $FAB_1$. Оказалось, что треугольник $B_1D_1F_1$ — правильный. Докажите, что треугольник $A_1C_1E_1$ также правильный.

**18.5.** Женя красила шарообразное яйцо последовательно в пяти красках, погружая его в стакан с очередной краской так, чтобы окрашивалась ровно половина площади поверхности яйца (полсферы). В результате яйцо окрасилось полностью. Докажите, что одна из красок была лишней, то есть если бы Женя не использовала эту краску, а в другие краски погружала бы яйцо так же, то оно всё равно окрасилось бы полностью.

**19.5.** Ортогональной проекцией тетраэдра на плоскость одной из его граней является трапеция площади 1. Может ли ортогональной проекцией этого тетраэдра на плоскость другой его грани быть квадрат площади 1?

**16.5.** Можно ли четырьмя плоскостями разрезать куб с ребром 1 на части так, чтобы для каждой из частей расстояние между любыми двумя её точками было:

а) меньше 4/5;

б) меньше 4/7?

Предполагается, что все плоскости проводятся одновременно, куб и его части не двигаются.

**14.5.** Поверхность выпуклого многогранника $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$ состоит из восьми треугольных граней $A_iB_jC_k$, где $i$, $j$, $k$ меняются от 1 до 2. Сфера с центром в точке $O$ касается всех этих граней. Докажите, что точка $O$ и середины трёх отрезков $A_1A_2$, $B_1B_2$ и $C_1C_2$ лежат в одной плоскости.

**11.5.** Рассматриваются ортогональные проекции данного правильного тетраэдра с единичным ребром на всевозможные плоскости. Какое наибольшее значение может принимать радиус круга, содержащегося в такой проекции?

**11.5** По рёбрам треугольной пирамиды ползают четыре жука, при этом каждый жук всё время остаётся только в одной грани (в каждой грани — свой жук). Каждый жук обходит границу своей грани в определённом направлении, причём так, что любые два жука по общему для них ребру ползут в противоположных направлениях. Докажите, что если скорости (возможно, непостоянные) каждого из жуков всегда больше 1 см/с, то когда-нибудь какие-то два жука обязательно встретятся независимо от пирамиды, начального положения и скорости жуков.

**10.5.** Внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ взята такая точка $P$, что $\angle PBA = \angle PCD = 90°$. Точка $M$ — середина стороны $AD$, причём $BM = CM$. Докажите, что $\angle PAB = \angle PDC$.

**15.6.** Все грани шестигранника — четырёхугольники, а в каждой его вершине сходятся по три ребра. Верно ли, что если для него существуют вписанная и описанная сферы, центры которых совпадают, то этот шестигранник — куб?

**12.6.** Про бесконечный набор прямоугольников известно, что в нём для любого числа $S$ найдутся прямоугольники суммарной площади больше $S$.

а) Обязательно ли этим набором можно покрыть всю плоскость, если при этом допускаются наложения?

б) Тот же вопрос, если дополнительно известно, что все прямоугольники в наборе являются квадратами.