

## Функциональные уравнения и неравенства

1. (ММО, 2006, окружной тур, 11) Найдите все такие функции  $f(x)$ , что

$$f(2x + 1) = 4x^2 + 14x + 7.$$

$$\boxed{1 + xz + z^x = (x)f}$$

2. (Problems.ru, №35379) Найдите все функции  $f(x)$ , определённые при всех действительных  $x$  и удовлетворяющие уравнению

$$2f(x) + f(1 - x) = x^2.$$

$$\boxed{\frac{x}{1-xz+z^x} = (x)f}$$

3. («Покори Воробьёвы горы!», 2015, 9) Найдите функцию  $f(x)$ , о которой известно, что

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot f\left(\frac{2x+3}{x-2}\right) + 3 & \text{при } x \neq 2, \\ 0 & \text{при } x = 2. \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{(1+x+z^x)z}{(x-z)(1+x)^x} = (x)f}$$

4. («Покори Воробьёвы горы!», 2019, 10–11) Найдите все возможные значения величины

$$T = \frac{f(t) - f(0)}{f(t^2) + f(t) - 2f(0) + 2},$$

если  $f(2x + y) - f(x + y) = 2x$  для всех действительных значений  $x$  и  $y$ .

$$\boxed{\left[\frac{x}{1} ; 1-\right]}$$

5. (ММО, 1991, 10.1) Функция  $f(x)$  при каждом значении  $x \in (-\infty, +\infty)$  удовлетворяет равенству

$$f(x) + \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot f(1 - x) = 1.$$

- а) Найдите  $f(0)$  и  $f(1)$ .  
 б) Найдите все такие функции  $f(x)$ .

$$\boxed{\frac{x}{1} = \left(\frac{x}{1}\right)f \text{ и } \frac{x}{1} \neq x \text{ или } \frac{xz-1}{z} = (x)f \text{ (} \vartheta : z - = (1)f \text{ ' } z = (0)f \text{ (e}$$

6. (Всеросс., 2000, ОЭ, 10.5) Существует ли функция  $f(x)$ , определённая при всех  $x \in \mathbb{R}$  и для всех  $x, y \in \mathbb{R}$  удовлетворяющая неравенству

$$|f(x + y) + \sin x + \sin y| < 2?$$

7. (Всеросс., 1994, ОЭ, 11.6) Функция  $f(x)$  определена и удовлетворяет соотношению

$$(x-1) \cdot f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - f(x) = x$$

при всех  $x \neq 1$ . Найдите все такие функции.

8. (Всеросс., 2018, РЭ, 11.7) Функция  $f(x)$ , заданная на всей числовой оси, при всех действительных  $x$  и  $y$  удовлетворяет условию

$$f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) f\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

Верно ли, что функция  $f(x)$  обязательно чётная?

9. (Всеросс., 1997, ОЭ, 11.8) Для каких  $\alpha$  существует функция  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , отличная от константы, такая, что

$$f(\alpha(x+y)) = f(x) + f(y) ?$$

10. (Всеросс., 2000, финал, 11.1) Найдите все функции  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , которые для всех  $x, y, z \in \mathbb{R}$  удовлетворяют неравенству

$$f(x+y) + f(y+z) + f(z+x) \geq 3f(x+2y+3z).$$

11. (Всеросс., 2005, финал, 11.5) Существует ли ограниченная функция  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  такая, что  $f(1) > 0$  и  $f(x)$  удовлетворяет при всех  $x, y \in \mathbb{R}$  неравенству

$$f^2(x+y) \geq f^2(x) + 2f(xy) + f^2(y) ?$$

12. (Всеросс., 1993, финал, 11.3) Найдите все функции  $f(x)$ , определённые при всех положительных  $x$ , принимающие положительные значения и удовлетворяющие при любых положительных  $x$  и  $y$  равенству  $f(x^y) = f(x)^{f(y)}$ .

## Периодичность

13. («Высшая проба», 2016, 10–11) Функция  $f(x)$ , определённая при всех действительных  $x$ , является чётной. Кроме того, при любом действительном  $x$  выполняется равенство

$$f(x) + f(10-x) = 4.$$

а) Приведите пример такой функции, отличной от константы.

б) Докажите, что любая такая функция является периодической.

14. (ОММО, 2014) Найдите все периодические функции  $y = f(x)$ , удовлетворяющие уравнению

$$f(x) - 0,5f(x-\pi) = \sin x.$$

$x \text{ и } \frac{x}{\tau} = (x)f$
--------------------------------------

## Функциональное уравнение Коши

Задача 12 показывает, что финалисту Всероссийской олимпиады желательно быть знакомым с теорией *функционального уравнения Коши*:

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Функцию, являющуюся решением уравнения Коши, будем называть *аддитивной*. Функцию  $f(x) = ax$  ( $a, x \in \mathbb{R}$ ) будем называть *линейной*. Легко проверить, что линейная функция является аддитивной. Возникает вопрос: при каких условиях, наоборот, аддитивная функция является линейной?

При отсутствии оговорок функция считается заданной на  $\mathbb{R}$ . Фигурирует также обозначение  $\mathbb{R}_+ = (0; +\infty)$ .

**15.** Докажите, что функция, аддитивная на  $\mathbb{Q}$  (множестве рациональных чисел), является линейной на  $\mathbb{Q}$ .

**16.** Докажите, что если аддитивная функция непрерывна на  $\mathbb{R}$ , то она линейна.

**17.** Докажите, что если аддитивная функция монотонна на некотором интервале  $(a, b) \subset \mathbb{R}$ , то она линейна.

**18.** Докажите, что если аддитивная функция  $f(x)$  принимает положительные значения для всех  $x > 0$ , то она линейна.

**19.** Найдите все непрерывные функции  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , удовлетворяющие уравнению

$$f(x + y) = f(x)f(y).$$

**20.** Найдите все непрерывные функции  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ , удовлетворяющие уравнению

$$f(xy) = f(x) + f(y).$$

**21.** Найдите все непрерывные функции  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , удовлетворяющие уравнению

$$f(xy) = f(x)f(y).$$

## Основные методы решения функциональных уравнений

Ниже предлагается перевод заметки [Basic Methods For Solving Functional Equations](#).

- *Подстановка конкретных значений переменных.* Чаще всего в качестве первой попытки можно подставить константы (например, 0 или 1), после чего (если возможно) использовать *подстановку выражений*, которые могут превратить какую-либо часть уравнения в константу. Например, если в уравнении присутствует  $f(x + y)$  и мы нашли  $f(0)$ , то подставляем  $y = -x$ . В более трудных задачах подстановки будут менее очевидными.
- *Математическая индукция.* С помощью этого метода, зная  $f(1)$ , находим  $f(n)$  для любого целого  $n$ . Затем находим  $f(\frac{1}{n})$  и  $f(r)$  для рациональных  $r$ . Данный подход применяется в ситуациях, когда функции определены на  $\mathbb{Q}$ , и является очень полезным, особенно в несложных задачах.

- *Исследование инъективности и сюръективности функций.* Во многих задачах установить данные факты несложно, а значение они могут иметь очень большое.
- *Нахождение неподвижных точек или нулей функций.* Количество задач, использующих данный метод, значительно меньше количества задач, в которых применяется какой-либо из трёх предыдущих подходов. Указанный метод встречается, как правило, в более сложных задачах.
- *Использование функционального уравнения Коши и уравнений, сводящихся к уравнению Коши.*
- *Исследование монотонности и непрерывности функции.* Непрерывность, как правило, даётся в качестве дополнительного условия и, так же как и монотонность, обычно используется при сведении задачи к уравнению Коши. В противном случае мы имеем дело с куда более сложной задачей.
- *Предположение, что в некоторой точке функция принимает большее или меньшее значение, чем функция, про которую мы хотим доказать, что она — решение.* Наиболее часто это используется как продолжение метода математической индукции и работает в тех задачах, где область значений функции ограничена сверху и снизу.
- *Использование рекуррентных соотношений.* Этот метод обычно используется в тех случаях, когда область значений функции ограничена, и когда мы можем найти связь между  $f(f(n))$ ,  $f(n)$  и  $n$ .
- *Исследование множества значений аргумента, при которых функция совпадает с предполагаемым решением.* Цель состоит в том, чтобы доказать, что описанное множество в точности совпадает с областью определения функции.
- *Функциональная подстановка.* Этот метод обычно используется для упрощения уравнения и редко имеет решающее значение.
- *Представление функции как суммы чётной и нечётной функций.* Именно, любая функция может быть представлена суммой чётной и нечётной функций, и это может оказаться очень удобно при рассмотрении «линейных» функциональных уравнений, содержащих много функций.
- *Использование числовых систем с основанием, отличным от 10.* Конечно, это может быть использовано только в том случае, когда область определения есть  $\mathbb{N}$ .
- *Очень важно угадать решение с самого начала.* Это может сильно помочь в нахождении подходящих подстановок. Также, в конце решения задачи НЕ ЗАБУДЬТЕ проверить, что найденное вами решение удовлетворяет заданным условиям.

## Неподвижные точки

**22.** (*IMO, 1983*) Find all functions  $f$  defined on the set of positive real numbers which take positive real values and satisfy the conditions:

- $f(xf(y)) = yf(x)$  for all positive  $x, y$ ;
- $f(x) \rightarrow 0$  as  $x \rightarrow +\infty$ .

$$\boxed{x/\Gamma = (x)f}$$

**23.** (*IMO, 2015*) Let  $\mathbb{R}$  be the set of real numbers. Determine all functions  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  that satisfy the equation

$$f(x + f(x + y)) + f(xy) = x + f(x + y) + yf(x)$$

for all real numbers  $x$  and  $y$ .

$$x - z = (x)f : x = (x)f$$

### Инъекция, сюръекция

**24.** (*IMO, 1992*) Let  $\mathbb{R}$  denote the set of all real numbers. Find all functions  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  such that

$$f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2$$

for all  $x, y \in \mathbb{R}$ .

$$x = (x)f$$

**25.** (*Balkan MO, 2000*) Find all functions  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  such that

$$f(xf(x) + f(y)) = (f(x))^2 + y$$

for all  $x, y \in \mathbb{R}$ .

$$x - = (x)f : x = (x)f$$

**26.** (*IMO, 2009, Shortlist*) Find all functions  $f$  from the set of real numbers into the set of real numbers which satisfy for all real  $x, y$  the identity

$$f(xf(x + y)) = f(yf(x)) + x^2.$$

$$x - = (x)f : x = (x)f$$

### Сужение, продолжение

**27.** (*IMO, 1999*) Determine all functions  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  such that

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1$$

for all real numbers  $x, y$ .

$$\frac{z}{z^x} - 1 = (x)f$$