Функции в уравнениях и неравенствах. 1

Содержание

В данной статье рассматриваются уравнения и неравенства, при решении которых используются различные свойства функций: монотонность, симметрия графика, периодичность.

1 Монотонность

Монотонно возрастающая (убывающая) функция принимает каждое своё значение ровно один раз. Этот факт можно использовать следующим образом: *подбираем* корень соответствующего уравнения, а потом из соображений монотонности *доказываем*, что других корней нет.

Задача 1. (*МГУ, ВМК, 1991*) Решить уравнение

$$\sqrt{x+4}+x-2=0.$$

Решение. Разумеется, не представляет труда решить это уравнение с помощью равносильного перехода или замены переменной. Но возможен и ещё один способ — самый простой в этой ситуации.

Рассмотрим функцию $f(x)=\sqrt{x+4}+x-2$ с областью определения $E=[-4;+\infty)$. Заметим, что $f(0)=0$, так что $x=0$ — корень нашего уравнения. Будучи суммой двух монотонно возрастающих функций $y=\sqrt{x+4}$ и $y=x-2$, функция f также является монотонно возрастающей на множестве E. Следовательно, ни при каких значениях x, кроме нуля, функция f в нуль не обращается. Поэтому других корней, кроме нуля, наше уравнение не имеет.

Ответ: 0.

Задача 2. (*МГУ, биологич. ф-т, 2005*) Решить неравенство

$$\sqrt{2-x}<x+4.$$

Решение. Запишем данное неравенство в виде $f(x)<0$, где

$$f(x)=\sqrt{2-x}+(-x-4).$$

Областью определения функции f является множество $E=(-\infty;2]$. Будучи суммой двух монотонно убывающих функций $y=\sqrt{2-x}$ и $y=-x-2$, функция f монотонно убывает на множестве E. Заметим, что $f(-2)=0$; следовательно, неравенство $f(x)<0$ равносильно системе

$$\begin{cases} x>-2, \\ x\in E \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad -2<x\leqslant 2.$$

Ответ: $(-2;2]$.

Задача 3. (*«Ломоносов», 2006*) Решите неравенство

$$\sqrt{x+1} - 1 \leqslant -x|x-2| - 4x.$$

Решение. Запишем наше неравенство в виде $f(x) \leqslant 1$, где

$$f(x) = \sqrt{x+1} + x|x-2| + 4x.$$

Функция $g(x) = \sqrt{x+1}$ монотонно возрастает на своей области определения $E = [-1; +\infty)$. Рассмотрим функцию

$$h(x) = x|x-2| + 4x = \begin{cases} 6x - x^2, & \text{если } x \leqslant 2; \\ x^2 + 2x, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

Функция $y = 6x - x^2$ монотонно возрастает при $x \leqslant 3$ (и, в частности, при $x \leqslant 2$), а функция $y = x^2 + 2x$ монотонно возрастает при $x \geqslant -1$ (и, в частности, при $x > 2$); поэтому функция h монотонно возрастает на всей числовой прямой (для наглядности постройте график $y = h(x)$). Значит, функция $f(x) = g(x) + h(x)$ монотонно возрастает на множестве E. Замечая, что $f(0) = 1$, приходим к выводу, что наше неравенство $f(x) \leqslant 1$ равносильно системе

$$\begin{cases} x \leqslant 0, \\ x \in E \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leqslant x \leqslant 0.$$

Ответ: $[-1; 0]$.

Замечание. Обратите внимание, сколь существенной оказалась группировка второго и третьего слагаемого функции f с объединением их в функцию h. Рассмотрение трёх слагаемых по отдельности не привело бы к цели: первое и третье являются монотонно возрастающими функциями, однако второе ($y = x|x-2|$) — нет!

2 Симметрия, периодичность

Перейдём к задачам, в которых существенную роль играет какая-либо симметрия графика функции или её периодичность.

Задача 4. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2010, 10–11*) Решите уравнение $f\left(\sqrt{x+4}\right) = f(2x)$, где $f(t) = 2t - t^2$ при всех действительных t.

Решение. Парабола $y = 2t - t^2$ симметрична относительно прямой $t = 1$, поэтому значения этой функции в точках t_1 и t_2 могут совпадать в двух случаях — если эти точки или совпадают, или симметричны относительно точки $t = 1$:

$$f(t_1) = f(t_2) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} t_1 = t_2, \\ \dfrac{t_1 + t_2}{2} = 1. \end{array}\right.$$

Таким образом, имеем:

$$f\left(\sqrt{x+4}\right) = f(2x) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+4} = 2x, \\ \sqrt{x+4} + 2x = 2. \end{array}\right. \tag{1}$$

Первое уравнение полученной совокупности равносильно системе

$$\begin{cases} x + 4 = 4x^2, \\ x \geqslant 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1 + \sqrt{65}}{2}.$$

Второе уравнение совокупности (1) имеет корень $x = 0$, который является единственным, так как левая часть уравнения есть функция, монотонно возрастающая на своей области определения.

Ответ: $0, \frac{1+\sqrt{65}}{8}$.

Задача 5. (*МГУ, химический ф-т, 1989*) Решить уравнение

$$(2x+1)\left(2+\sqrt{(2x+1)^2+3}\right)+3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)=0.$$

Решение. Данное уравнение имеет вид

$$f(2x+1)+f(3x)=0, \tag{2}$$

где

$$f(t)=t\left(2+\sqrt{t^2+3}\right).$$

Функция f определена на всей числовой прямой и является нечётной: $f(-t) = -f(t)$. При $t > 0$ функция f монотонно возрастает, будучи произведением двух монотонно возрастающих функций $y = t$ и $y = 2 + \sqrt{t^2 + 3}$, принимающих только положительные значения. Ввиду своей нечётности функция f монотонно возрастает поэтому и при $t < 0$.

Пусть для чисел a и b выполнено равенство $f(a)+f(b) = 0$, то есть $f(b) = -f(a)$. Поскольку $f(-a) = -f(a)$, имеем $f(b) = f(-a)$, что ввиду монотонности функции f эквивалентно $b = -a$ или $a + b = 0$. Таким образом, уравнение (2) равносильно уравнению

$$2x+1+3x=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-\frac{1}{5}.$$

Ответ: $-\frac{1}{5}$.

Задача 6. (*МГУ, ф-т почвоведения, 2000*) Пусть $f(x)$ — периодическая функция с периодом 8, такая, что $f(x) = 8x - x^2$ при $x \in [0; 8]$. Решите уравнение

$$f(2x+16)+23=5f(x). \tag{3}$$

Решение. Обе части уравнения (3) являются функциями, периодическими с периодом 8 (левая часть периодична даже с периодом 4, но это не важно). В силу указанной периодичности множество корней этого уравнения (если оно непустое) распадается на серии, в каждой из которых любые два корня отличаются на целое число, кратное 8. Значит, нам достаточно найти корни уравнения (3) на отрезке $[0; 8]$, после чего все корни найдутся путём прибавления к найденным значениям слагаемого $8n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Обозначим $t = 2x + 16$. Имеем два различных случая расположения переменной x на рассматриваемом отрезке $[0; 8]$.

1. Если $x \in E_1 = [0; 4]$, то $t \in [16; 24]$, и тогда

   $$f(2x+16)=f(t)=8(t-16)-(t-16)^2=8\cdot 2x-(2x)^2=16x-4x^2.$$

   Уравнение (3) принимает вид

   $$16x-4x^2+23=5(8x-x^2) \quad \Leftrightarrow \quad x^2-24x+23=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &x=1,\\ &x=23.\end{aligned}\right.$$

   Множеству E_1 принадлежит только $x = 1$.

2. Если $x \in E_2 = [4;8]$, то $t \in [24;32]$, и тогда

$$f(2x+16) = f(t) = 8(t-24) - (t-24)^2 = 8(2x-8) - (2x-8)^2 = -4x^2 + 48x - 128.$$

Теперь уравнение (3) принимает вид

$$-4x^2 + 48x - 128 + 23 = 5(8x - x^2) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 8x - 105 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 7, \\ x = -15. \end{array}\right.$$

Множеству E_2 принадлежит только $x = 7$.

Итак, на отрезке $[0;8]$ уравнение (3) имеет два корня: $x = 1$ и $x = 7$. Следовательно, множество всех корней данного уравнения состоит из двух серий: $1 + 8n$ и $7 + 8n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $1 + 8n$, $7 + 8n$, $n \in \mathbb{Z}$.

3 Задачи

1. (*МГУ, социологич. ф-т, 2004*) Дана функция

$$y(x) = |x-3| + |2x-4| + 1.$$

1) Найти наименьшее значение функции $y(x)$.
2) Решить неравенство $y(x) > 8$.

$\boxed{1)\ 2;\ 2)\ (-\infty;0) \cup \left(\tfrac{14}{3};+\infty\right)}$

Монотонность

2. (*МГУ, геологич. ф-т, 1995*) Решить уравнение: $\sqrt{5x-6} + x = 4$.

$\boxed{2}$

3. (*МГУ, химический ф-т, 1996*) Решить неравенство: $\sqrt{x+5} > 7 - x$.

$\boxed{(4;+\infty)}$

4. (*МГУ, биологич. ф-т, 2005*) Решить неравенство: $\sqrt{x-1} < 3 - x$.

$\boxed{[1;2)}$

5. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 7–9*) Решите уравнение

$$\left(\sqrt{x}\right)^{2016} + \left(\sqrt{1-x}\right)^{2016} = 1.$$

$\boxed{0;\ 1}$

6. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2013, 8–9*) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x(1+x^2)(1+x^4) + y(1+y^2)(1+y^4) = 0, \\ xy + 1000 = 0. \end{cases}$$

$\boxed{\left(10\sqrt{10}, -10\sqrt{10}\right);\ \left(-10\sqrt{10}, 10\sqrt{10}\right)}$

7. (*«Ломоносов», 2014, 9*) Решите уравнение

$$(x^2-7x)\cdot\sqrt[2013]{(x^2-7x)^2+1}+(2x+6)\cdot\sqrt[2013]{(2x+6)^2+1}=0.$$

$\boxed{2;\,3}$

8. (*«Ломоносов», 2019, 9*) Числа a, b и c удовлетворяют равенству $\sqrt{a}=\sqrt{b}+\sqrt{c}$. Найдите a, если $b=52-30\sqrt{3}$ и $c=a-2$.

$\boxed{a=27}$

9. (*«Высшая проба», 2012, 9*) Докажите, что все положительные корни многочлена

$$x(x+1)(x+2)(x+3)-1$$

больше $1/8$.

10. (*«Высшая проба», 2012, 10*) Докажите, что все положительные корни многочлена

$$x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-2$$

больше $1/14$.

11. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11*) Решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{x-2}-3}\geqslant\frac{1}{\sqrt{x-1}-2}\,.$$

$\boxed{[2;5)\cup(11;+\infty)}$

12. (*МФТИ, 2004*) Решить неравенство

$$\frac{1}{x-1}+\frac{5}{6-3\sqrt{6+x-x^2}}>\frac{1}{1+|x-1|}\,.$$

$\boxed{[-2;-1)\cup\left(1;\frac{9}{5}\right)\cup(2;3]}$

13. (*МГУ, мехмат, 2001-03.1*) Решите уравнение

$$3x-2|x-2|=3\sqrt{3x+18}-2\left|\sqrt{3x+18}-2\right|.$$

$\boxed{6}$

14. (*«Ломоносов», 2006*) Решите неравенство

$$\sqrt{4-x}-2\leqslant x|x-3|+4x.$$

$\boxed{[0;4]}$

15. (*«Ломоносов», 2011, 10–11*) Сколько решений имеет уравнение

$$\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x-2)^2}=\frac{2}{x^2}\,?$$

Одно

16. (*МГУ, ВМК, 2001*) Функция $f(x)$ определена, возрастает и отрицательна на всей числовой прямой. Решите неравенство

$$\frac{2f(x^2-2x-112)+\left|f(x^2-2x-112)-3f\left(-2x\sqrt{32-2x}\,\right)\right|}{\left(3f\left(-2x\sqrt{32-2x}-112\right)-2f\left(-2x\sqrt{32-2x}\,\right)\right)^7}>0.$$

$\left(-13-\sqrt{57};8\right)$

Симметрия, периодичность

17. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2010, 10–11*) Решите уравнение $f\left(\sqrt{x+9}\right)=f(3x)$, где $f(t)=$ $=3t-t^2$ при всех действительных t.

$0,\ \frac{1+\sqrt{325}}{18}$

18. (*МГУ, химический ф-т, 1989*) Решить уравнение

$$(2x+1)\left(1+\sqrt{(2x+1)^2+7}\right)+x\left(1+\sqrt{x^2+7}\right)=0.$$

$-\frac{1}{3}$

19. (*МГУ, ф-т почвоведения, 2000*) Пусть $f(x)$ — периодическая функция с периодом 1, такая, что $f(x)=x^2$ при $x\in[0;1)$. Решите уравнение

$$f(2x+5)+2f(x)=1.$$

$\frac{1}{\sqrt{6}}+n,\ \frac{2}{3}+n,\ n\in\mathbb{Z}$

20. (*МГУ, экономич. ф-т, 1997*) Функция f определена на всей числовой прямой, является нечётной, периодической с периодом 4 и на промежутке $0\leqslant x\leqslant 2$ её значения вычисляются по правилу $f(x)=1-|x-1|$. Решить уравнение

$$2f(x)f(x-8)+5f(x+12)+2=0.$$

$-\frac{3}{2}+4n,\ -\frac{1}{2}+4k,\ n,k\in\mathbb{Z}$

21. (*МГУ, экономич. ф-т, 1997*) Функция f определена на всей числовой прямой, является нечётной, периодической с периодом 4 и на промежутке $-2 \leqslant x \leqslant 0$ её значения вычисляются по правилу $f(x) = 2x(x+2)$. Решить уравнение

$$\frac{2f(-3-x)-3}{\sqrt{f\left(\frac{x}{2}+\frac{3}{4}\right)-\sqrt{2}}} = 0.$$

$\boxed{-\frac{1}{2}+8n,\ n\in\mathbb{Z}}$

22. (*«Курчатов», 2019, 11*) Про положительные числа x и y известно, что

$$\frac{1}{1+x+x^2}+\frac{1}{1+y+y^2}+\frac{1}{1+x+y} = 1.$$

Какие значения может принимать произведение xy? Укажите все возможные варианты и докажите, что других нет.

$\boxed{1}$

23. (*Всеросс., 2019, МЭ, 10.5*) Найдите все пары (x, y) действительных чисел, удовлетворяющие условиям: $x^3+y^3=1$ и $x^4+y^4=1$.

$\boxed{(0,1) \text{ и } (1,0)}$

24. (*Всеросс., 2016, РЭ, 10*) Найдите все такие пары различных действительных чисел x и y, что $x^{100}-y^{100}=2^{99}(x-y)$ и $x^{200}-y^{200}=2^{199}(x-y)$.

$\boxed{(2,0);\ (0,2)}$

Композиция функций

25. (*ОММО, 2019*) Обозначим $f(x)=9x^2+8x-2$. Решите уравнение $f(f(x))=x$.

$\boxed{-1,\ \frac{2}{9},\ \frac{-3\pm\sqrt{13}}{9}}$

26. (*ОММО, 2010*) Решите уравнение $f(f(x))=f(x)$, где $f(x)=\sqrt[5]{3-x^3-x}$.

$\boxed{1}$

27. (*ОММО, 2010*) Решите уравнение $f(f(x))=f(x)$, где $f(x)=2^{-x^3-x}-5$.

$\boxed{-1}$

28. (*«Ломоносов», 2014, 10–11*) Дана функция $f(x)=\big||x+2|-4\big|$. Сколько корней имеет уравнение

$$f\left(f\left(\ldots f\left(f(x)\right)\ldots\right)\right)=1,$$

в котором функция f берётся 2014 раз?

$\boxed{4032}$