

## Функциональные вычисления

1. («Ломоносов», 2012, 9) Функция  $f(x)$  удовлетворяет при каждом значении  $x$  равенству

$$f(x + 2) = f(x) + 4x + 4.$$

Найдите  $f(2012)$ , если  $f(2) = 0$ .

$f(2012) = 2012^2 - 4 = 4048140$

2. («Ломоносов», 2016, 9) Найдите величину

$$f\left(\frac{1}{2016}\right) + f\left(\frac{2}{2016}\right) + \dots + f\left(\frac{2016}{2016}\right),$$

если  $f(x) = \frac{x^3 + 9x - 2}{x^2 - x + 2}$ .

$3026,5$

3. (ММО, 2007, окружной тур, 11) Функция  $f$  такова, что для любых положительных  $x$  и  $y$  выполняется равенство  $f(xy) = f(x) + f(y)$ . Найдите  $f(2007)$ , если  $f\left(\frac{1}{2007}\right) = 1$ .

$-1$

4. (ОММО, 2015, 9–10) Будем обозначать  $f^{(n)}(x)$  последовательное применение  $n$  раз функции  $f$  (например,  $f^{(2)}(x) = f(f(x))$  и т. д.). Даны функции  $g(x) = \frac{1}{x+1}$  и  $h(x) = \frac{x+1}{x}$ . Найдите значение выражения  $g^{(2015)}(100) \cdot h^{(2015)}(1/100)$ .

$1$

5. (ОММО, 2009) Пусть  $f(x) = \frac{x}{3} + 2$ . Найдите значение функции

$$\underbrace{f(\dots f(f(x)) \dots)}_{2009}$$

в точке  $x = 4$ .

$3 + \frac{1}{3}$

6. (ОММО, 2011) Функция  $f$  такова, что  $f(2x - 3y) - f(x + y) = -2x + 8y$  для всех  $x, y$ . Найдите все возможные значения выражения  $\frac{f(5t) - f(t)}{f(4t) - f(3t)}$ .

$4$

7. (ОММО, 2012) Функция  $f(x)$  для всех  $x$  удовлетворяет равенству  $f(x + 3) = x + 2 - f(x)$ , а при  $x \in [-3; 0)$  задаётся формулой  $f(x) = x^2$ . Найдите  $f(2012)$ .

$1001$

8. («Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11) Для функции  $f(x) = -\frac{x^2}{1+x^2}$  найдите сумму

$$f\left(\frac{1}{2018}\right) + f\left(\frac{1}{2017}\right) + \dots + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) + f(2) + \dots + f(2017) + f(2018).$$

5'210Z-

9. (ОММО, 2013) Пусть

$$S_n = f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) + f(1).$$

Найдите  $S_{2013}$  для  $f(x) = \frac{9^x}{9^x+3}$ .

2001

10. («Физтех», 2016, 10) Про функцию  $f(x)$  и некоторое положительное число  $c$  известно, что

$$f(x+c) = \frac{\sqrt{3}f(x)+1}{\sqrt{3}-f(x)}$$

при всех значениях  $x$ . При каком наименьшем целом значении  $k$  из интервала  $(25; 50)$  можно утверждать, что  $f(x+kc) = f(x)$  при всех  $x$ ?

0E

11. («Физтех», 2016, 11) Пусть  $f(n)$  — целое число, ближайшее к числу  $\sqrt{n}$ . Обозначим  $g(n) = \frac{1}{f(n)}$ . Найдите сумму

$$g(211) + g(212) + \dots + g(2025).$$

19

12. (ММО, 2019, 11.1) Пусть  $f(x) = x^2 + 3x + 2$ . Вычислите

$$\left(1 - \frac{2}{f(1)}\right) \left(1 - \frac{2}{f(2)}\right) \left(1 - \frac{2}{f(3)}\right) \dots \left(1 - \frac{2}{f(2019)}\right).$$

0101  
2E