

Формулы сокращённого умножения

1. (Формулы сокращённого умножения) Докажите тождества:

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}); \\ a^{2n} - b^{2n} &= (a + b)(a^{2n-1} - a^{2n-2}b + a^{2n-3}b^2 - \dots - a^2b^{2n-3} + ab^{2n-2} - b^{2n-1}); \\ a^{2n+1} + b^{2n+1} &= (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \dots + a^2b^{2n-2} - ab^{2n-1} + b^{2n}). \end{aligned}$$

Отсюда заключаем:

- 1) $a^n - b^n$ делится на $a - b$ при любом натуральном n ;
 - 2) $a^{2n} - b^{2n}$ делится на $a + b$ при любом натуральном n ;
 - 3) $a^{2n+1} + b^{2n+1}$ делится на $a + b$ при любом натуральном n .
2. Докажите, что: а) $9^{26} - 2^{65}$ делится на 49; б) $5^{300} - 4^{200}$ делится на 141; в) $2^{60} + 7^{30}$ делится на 13.
3. (ОММО, 2009) Докажите, что $6255^3 - 5995^3$ делится на 13.
4. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 9) На сколько нулей оканчивается число

$$\left(\underbrace{100\dots 01}_{2017} \right)^{2017} - 1?$$

8102

5. (ОММО, 2013) Докажите, что число $2^{2014} + 1$ можно представить в виде произведения трёх натуральных чисел, больших 1.
6. (ММО, 2000, 9.1) Решите уравнение

$$(x + 1)^{63} + (x + 1)^{62}(x - 1) + (x + 1)^{61}(x - 1)^2 + \dots + (x - 1)^{63} = 0.$$

7. («Высшая проба», 2013, 8) Докажите, что число

$$10^{10^{10^{2013}}} + 10^{10^{2013}} + 10^{2013} - 1$$

не простое.

8. («Курчатов», 2017, 10) Найдите все натуральные n такие, что число $8^n + n$ делится на $2^n + n$.

1, 2, 4, 6, 9