

## Целая и дробная части

1. («Надежда энергетики», 2022, 6.2) Целой частью  $[x]$  числа  $x$  называется наибольшее целое  $m$  такое, что  $m \leq x$ . Например,  $[-4/3] = -2$ ,  $[\pi] = 3$ ,  $[2] = 2$ . Решите в целых числах уравнение

$$\left[ \frac{x}{2} \right] + \left[ \frac{x+1}{2} \right] = 2x + 4.$$

$\boxed{7 - x}$

2. («Надежда энергетики», 2022, 7.5) Целой частью  $[x]$  числа  $x$  называется наибольшее целое  $m$  такое, что  $m \leq x$ . Например,  $[-4/3] = -2$ ,  $[\pi] = 3$ ,  $[2] = 2$ . Решите в целых числах уравнение

$$\left[ \frac{x}{10} \right] + \left[ \frac{x+1}{10} \right] + \dots + \left[ \frac{x+9}{10} \right] = x^2.$$

$\boxed{1 = x : 0 = x}$

3. (МЦНМО, 7) Решите уравнение

$$[x^3] + [x^2] + [x] = \{x\} - 1.$$

$\boxed{1 -}$

4. («Росатом», 2018, 7.4) Целой частью числа  $x$ , обозначение  $[x]$ , называют наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ . Число  $\{x\} = x - [x]$  называют дробной частью числа  $x$ . Найти  $x$ , для которого  $2x + [x] = 4$ .

$\boxed{\frac{7}{8} = x}$

5. («Надежда энергетики», 2020, 7.3) На координатной плоскости выделен квадрат  $K$  с вершинами в точках  $(0, 0)$  и  $(10, 10)$ . Изобразите внутри этого квадрата множество  $M$  точек  $(x, y)$ , координаты которых удовлетворяют уравнению

$$[x] = [y],$$

где  $[a]$  обозначает целую часть числа  $a$  (то есть наибольшее целое число, не превосходящее  $a$ ; например,  $[10] = 10$ ,  $[9,93] = 9$ ,  $[1/9] = 0$ ,  $[-1,7] = -2$ ). Какую часть площади квадрата  $K$  составляет площадь множества  $M$ ?

$\boxed{\text{Площадь множества } M \text{ составляет } 10\% \text{ площади квадрата } K}$

6. («Росатом», 2017, 7.4) Обозначим через  $[a]$  — целую часть числа  $a$ , т. е. наибольшее целое число не превосходящее  $a$ . Область  $D$  на плоскости содержит точки  $M(x; y)$ , для которых координаты  $x, y$  удовлетворяют уравнению  $2[x+1] + 3[y+2] = 13$  и условию  $x \in [-2; 3]$ . Нарисовать область  $D$  на координатной плоскости и найти ее площадь.

$\boxed{7 = S}$