Целая и дробная части

В задачах с целой и дробной частями иногда помогает замена $x = n + \alpha$, где $n = [x]$ и $\alpha = \{x\}$. Казалось бы, вместо одной переменной возникают две, однако имеются ограничения, которые можно использовать: n — целое и $0 \leqslant \alpha < 1$.

1. (*«Ломоносов», 2019, 10–11*) Найдите целую часть числа $a + \frac{9}{b}$, где a и b — соответственно целая и дробная часть числа $\sqrt{76 - 42\sqrt{3}}$.

$\boxed{12}$

2. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2019, 10–11*) Решите уравнение

$$x^2 + 8\{x + 4\} - 9 = 0,$$

где $\{a\}$ — дробная часть числа a.

$\boxed{-3;\ +3;\ \sqrt{33} - 4;\ \sqrt{41} - 4}$

3. (*Моск. матем. регата, 2012, 10*) Решите неравенство: $[x] \cdot \{x\} < x - 1$.

$\boxed{x \geqslant 2}$

4. (*«Курчатов», 2014, 11*) Решите уравнение $[x] \cdot \{x\} = x^2$.

$\boxed{0}$

5. (*«Курчатов», 2018, 11*) Найдите все вещественные числа x, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{1}{[x]} + \frac{1}{[2x]} = \{x\} + \frac{2}{5},$$

где через $[x]$ обозначена целая часть числа x (то есть наибольшее целое число, не превосходящее x), а $\{x\} = x - [x]$.

$\boxed{2\frac{7}{20};\ 3\frac{1}{10};\ 1\frac{14}{15}}$

6. (*«Ломоносов», 2008*) Найдите все натуральные значения n, удовлетворяющие уравнению

$$2004\left[n\sqrt{1002^2 + 1}\right] = n\left[2004\sqrt{1002^2 + 1}\right],$$

где $[x]$ — наибольшее целое число, не превосходящее числа x.

$\boxed{1, 2, \ldots, 2004}$

7. (*ММО, 1957, 9.2*) Решите уравнение: $x^3 - [x] = 3$.

$\boxed{\sqrt[3]{4}}$

8. (*Всеросс., 1998, ОЭ, 10.5*) Решите уравнение : $\{(x + 1)^3\} = x^3$.

$\boxed{0,\ \frac{\sqrt{21}-3}{6},\ \frac{\sqrt{33}-3}{6},\ \frac{\sqrt{5}-1}{2},\ \frac{\sqrt{57}-3}{6},\ \frac{\sqrt{69}-3}{6}}$

9. (*Турнир городов, 1985, 7–8*) а) Привести пример такого положительного a, что

$$\{a\} + \left\{\frac{1}{a}\right\} = 1.$$

б) Может ли такое a быть рациональным числом?

10. (*Турнир городов, 1990, 8–9*) Найти число решений в натуральных числах уравнения

$$\left[\frac{x}{10}\right] = \left[\frac{x}{11}\right] + 1.$$

$\boxed{110}$

11. (*Всеросс., 2000, финал, 10.1*) Найдите сумму

$$\left[\frac{1}{3}\right] + \left[\frac{2}{3}\right] + \left[\frac{2^2}{3}\right] + \left[\frac{2^3}{3}\right] + \ldots + \left[\frac{2^{1000}}{3}\right].$$

$\boxed{\frac{2^{1001}-2}{3} - 500}$

12. (*Турнир городов, 2016, 8–9*) Существуют ли такие целые числа a и b, что
а) уравнение $x^2 + ax + b = 0$ не имеет корней, а уравнение $[x^2] + ax + b = 0$ имеет;
б) уравнение $x^2 + 2ax + b = 0$ не имеет корней, а уравнение $[x^2] + 2ax + b = 0$ имеет?

13. (*Турнир городов, 1996, 8–9*) В ряд выписаны действительные числа a_1, a_2, a_3, $\ldots$, a_{1996}. Докажите, что можно выделить одно или несколько стоящих рядом чисел так, что их сумма будет отличаться от целого числа меньше, чем на 0,001.

14. (*ММО, 1981, 7.4, 8.4*) Дано число x, большее 1. Обязательно ли имеет место равенство

$$\left[\sqrt{[\sqrt{x}]}\right] = \left[\sqrt{\sqrt{x}}\right]?$$

15. (*ММО, 2018, 9.3*) Докажите, что для любых натуральных a_1, a_2, $\ldots$, a_k таких, что

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_k} > 1,$$

у уравнения

$$\left[\frac{n}{a_1}\right] + \left[\frac{n}{a_2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{a_k}\right] = n$$

не больше чем $a_1a_2\ldots a_k$ решений в натуральных числах. ($[x]$ — целая часть числа x, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x.)

16. (*ММО, 1955, 8.5*) Числа $[a]$, $[2a]$, $\ldots$, $[Na]$ различны между собой, и числа $\left[\frac{1}{a}\right]$, $\left[\frac{2}{a}\right]$, $\ldots$, $\left[\frac{M}{a}\right]$ тоже различны между собой. Найти все такие a.

17. (*ММО, 1969, 10.4*) Существует ли такое число x, что ни для какого натурального числа n число $[x \cdot 1969^n]$ не делится на $[x \cdot 1969^{n-1}]$?

18. (*Турнир городов, 2002, 10–11*) Существуют ли такие иррациональные числа a и b, что $a > 1$, $b > 1$ и $[a^m]$ отлично от $[b^n]$ при любых натуральных числах m и n?

19. (*Турнир городов, 2016, 10–11*) Фирма записала свои расходы в рублях по 100 статьям бюджета, получив список из 100 чисел (у каждого числа не более двух знаков после запятой). Каждый счетовод взял копию списка и нашёл приближённую сумму расходов, действуя следующим образом. Вначале он произвольно выбрал из списка два числа, сложил их, отбросил у суммы знаки после запятой (если они были) и записал результат вместо выбранных двух чисел. С полученным списком из 99 чисел он проделал то же самое, и так далее, пока в списке не осталось одно целое число. Оказалось, что в итоге все счетоводы получили разные результаты. Какое наибольшее число счетоводов могло работать в фирме?

20. (*Турнир городов, 1983, 9–10*) Докажите для каждого натурального числа $n > 1$ равенство:

$$\left[n^{\frac{1}{2}}\right] + \left[n^{\frac{1}{3}}\right] + \ldots + \left[n^{\frac{1}{n}}\right] = [\log_2 n] + [\log_3 n] + \ldots + [\log_n n] \,.$$

21. (*Всеросс., 1999, финал, 9.6*) Докажите, что при любом натуральном n справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{n^2} \left\{\sqrt{k}\right\} \leqslant \frac{n^2 - 1}{2} \,.$$

22. (*Всеросс., 2019, РЭ, 10.10*) Последовательность натуральных чисел a_1, a_2, ... задана условиями $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + a_{[\sqrt{n}]}$ при всех натуральных $n \geqslant 1$. Докажите, что для каждого натурального k в этой последовательности найдётся член, делящийся на k. (Как обычно, $[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x.)