

Формулы сложения

Формулы сложения — это формулы преобразования тригонометрических функций суммы и разности двух аргументов:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta; \quad (1)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta; \quad (2)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta; \quad (3)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta; \quad (4)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}; \quad (5)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}; \quad (6)$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}; \quad (7)$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha}. \quad (8)$$

Давайте посмотрим, как выводятся формулы сложения. Начинаем с тождества (2) — формулы косинуса разности двух углов.

Расстояние между точками A и B на плоскости будем обозначать $\rho(A, B)$. Если (x_A, y_A) — координаты точки A и (x_B, y_B) — координаты точки B , то, как известно из геометрии,

$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}. \quad (9)$$

На рис. 1 изображены точки α и β , расположенные на тригонометрической окружности и соединённые синим отрезком. Показана также точка $\alpha - \beta$, отвечающая разности углов α и β ; она соединена с точкой 0 красным отрезком.

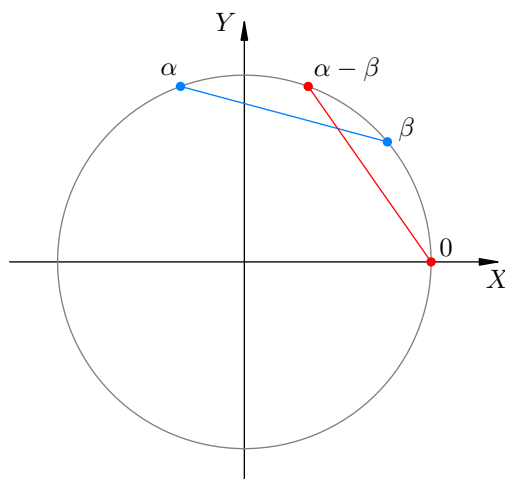


Рис. 1. К выводу формулы для косинуса разности

При повороте на угол $-\beta$ вокруг начала координат синий отрезок совмещается с красным, поэтому длины этих отрезков равны:

$$\rho(\alpha, \beta) = \rho(\alpha - \beta, 0). \quad (10)$$

Оба расстояния в этом равенстве мы найдём с помощью формулы (9). Имеем:

$$\begin{aligned}\rho^2(\alpha, \beta) &= (x_\alpha - x_\beta)^2 + (y_\alpha - y_\beta)^2 = (\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2 = \\ &= \cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta = \\ &= 2 - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta); \\ \rho^2(\alpha - \beta, 0) &= (x_{\alpha-\beta} - 1)^2 + (y_{\alpha-\beta} - 0)^2 = (\cos(\alpha - \beta) - 1)^2 + \sin^2(\alpha - \beta) = \\ &= \cos^2(\alpha - \beta) - 2 \cos(\alpha - \beta) + 1 + \sin^2(\alpha - \beta) = 2 - 2 \cos(\alpha - \beta).\end{aligned}$$

Сопоставляя полученные результаты, видим, что

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

Формула (2) для косинуса разности тем самым доказана. Формула (1) для косинуса суммы получается из неё немедленно:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos \alpha \cos(-\beta) + \sin \alpha \sin(-\beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

Мы воспользовались здесь чётностью косинуса и нечётностью синуса:

$$\cos(-\beta) = \cos \beta, \quad \sin(-\beta) = -\sin \beta.$$

Чтобы получить формулы (3) и (4) синуса суммы и разности, нам понадобится один промежуточный результат. По формуле косинуса разности имеем:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \frac{\pi}{2} \cos \alpha + \sin \frac{\pi}{2} \sin \alpha = 0 \cdot \cos \alpha + 1 \cdot \sin \alpha = \sin \alpha.$$

Таким образом, мы получили полезную формулу косинуса дополнительного угла¹:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha. \quad (11)$$

Заменим в формуле (11) угол α на $\pi/2 - \alpha$:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right),$$

то есть

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha. \quad (12)$$

Это формула синуса дополнительного угла.

Теперь, располагая формулами косинуса и синуса дополнительного угла, имеем:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) = \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos \beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin \beta = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.\end{aligned}$$

Формула синуса суммы тем самым доказана. Формула синуса разности получается из неё легко:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \sin(-\beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

(здесь мы снова воспользовались чётностью косинуса и нечётностью синуса).

¹Углы α и $\pi/2 - \alpha$ называются *дополнительными* по аналогии с прямоугольным треугольником: два таких острых угла являются углами в прямоугольном треугольнике и дополняют друг друга до 90° .

Итак, мы выяснили, откуда берутся первые четыре формулы сложения (1)–(4). Из них, в свою очередь, вытекают формулы (5)–(8).

Докажем, например, тождество (5). Имеем:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}.$$

Делим числитель и знаменатель полученного равенства на $\cos \alpha \cos \beta$:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta},$$

что и требовалось. Формула (6) получается отсюда заменой β на $-\beta$ с последующим учётом нечётности тангенса:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \operatorname{tg}(\alpha + (-\beta)) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}(-\beta)}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}(-\beta)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

Формулы (7) и (8) выводятся аналогично. Сделайте это самостоятельно, чтобы лишний раз поупражняться в тригонометрических преобразованиях.

Формулы сложения позволяют получать значения тригонометрических функций новых углов исходя из уже известных значений.

Вычислим, например, $\sin 15^\circ$. Имеем:

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

Формулы сложения составляют фундамент тригонометрии. Из них выводится масса нужных формул. Наиболее важным тригонометрическим формулам будут посвящены также следующие три статьи.

Задачи

1. Вычислите:

а) $\sin 12^\circ \cos 78^\circ + \cos 12^\circ \sin 78^\circ$;

в) $\cos \frac{7\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} + \sin \frac{7\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12}$;

д) $\sin 21^\circ \sin 24^\circ - \cos 21^\circ \cos 24^\circ$;

ж) $\sin \frac{9\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} - \cos \frac{9\pi}{7} \sin \frac{2\pi}{7}$;

б) $\sin 56^\circ \cos 26^\circ - \cos 56^\circ \sin 26^\circ$;

г) $\cos \frac{7\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} - \sin \frac{7\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12}$;

е) $\sin 34^\circ \sin 124^\circ + \cos 34^\circ \cos 124^\circ$;

з) $\sin \frac{11\pi}{36} \cos \frac{7\pi}{36} + \cos \frac{11\pi}{36} \sin \frac{7\pi}{36}$.

$\Gamma(\epsilon; 0) (\kappa; 0) (\theta; \frac{\pi}{2}) - (\Gamma; 1) - (\Gamma; \frac{\pi}{2}) (\kappa; \frac{\pi}{2}) (\theta; 1) (\epsilon$

2. Упростите выражение:

а) $\cos 3x \cos 5x - \sin 3x \sin 5x$;

в) $\sin 5\alpha \cos 3\alpha - \sin 3\alpha \cos 5\alpha$;

б) $\sin y \cos 2y + \cos y \sin 2y$;

г) $\cos \beta \cos 6\beta + \sin \beta \sin 6\beta$.

$g^g \cos (\Gamma; \pi) \sin (\kappa; \pi) (\theta; \pi) \cos (\Gamma; \pi) \sin (\kappa; \pi) (\theta; \pi)$

3. Докажите тождества:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}; & \text{б) } \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}; \\ \text{в) } \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}; & \text{г) } \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}; \\ \text{д) } \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \sin \beta}; & \text{е) } \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cos \beta}. \end{array}$$

4. Докажите тождества:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha; & \text{б) } \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha; \\ \text{в) } \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha; & \text{г) } \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha. \end{array}$$

5. Докажите тождества:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } 2 \sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) = \cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha; & \text{б) } 2 \cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) = \sqrt{3} \cos \alpha - \sin \alpha; \\ \text{в) } \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \cos \alpha + \sin \alpha; & \text{г) } \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \cos \alpha - \sin \alpha; \\ \text{д) } 2 \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = \sqrt{3} \cos \alpha + \sin \alpha; & \text{е) } 2 \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = \cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha. \end{array}$$

6. Используя равенство $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$, вычислите: а) $\sin 75^\circ$; б) $\cos 75^\circ$.

$$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \quad (\text{а}); \quad \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \quad (\text{б})$$

7. Используя равенство $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$, вычислите: а) $\sin 15^\circ$; б) $\cos 15^\circ$.

$$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \quad (\text{а}); \quad \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \quad (\text{б})$$

8. Используя равенство $105^\circ = 60^\circ + 45^\circ$, вычислите: а) $\sin 105^\circ$; б) $\cos 105^\circ$.

$$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \quad (\text{а}); \quad \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \quad (\text{б})$$

9. Упростите выражение:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right); & \text{б) } \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right); \\ \text{в) } \frac{2 \cos \alpha \sin \beta + \sin(\alpha - \beta)}{2 \cos \alpha \cos \beta - \cos(\alpha - \beta)}; & \text{г) } \frac{\cos \alpha \cos \beta - \cos(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta - \cos(\alpha - \beta)}. \end{array}$$

$$\frac{1}{2} \cos \alpha \cos \beta - \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta) \quad (\text{а}); \quad \frac{1}{2} \sin \alpha \sin \beta - \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) \quad (\text{б})$$

10. Докажите тождества:

а) $\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}$;

б) $\frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1}$;

в) $\sin(\alpha - \beta) \sin(\alpha + \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$;

г) $\cos(\alpha - \beta) \cos(\alpha + \beta) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta$.

11. Вычислите $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$, если $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

$$\frac{9}{9\sqrt{2}+1}$$

12. Вычислите $\cos(x + y)$, если $\sin x = \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ и $\cos y = \frac{5}{13}$, $\frac{3\pi}{2} < y < 2\pi$.

$$99/91$$

13. Вычислите:

а) $\frac{\operatorname{tg} 22^\circ + \operatorname{tg} 8^\circ}{1 - \operatorname{tg} 22^\circ \operatorname{tg} 8^\circ}$;

б) $\frac{\operatorname{tg} \frac{7\pi}{18} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{18}}{1 + \operatorname{tg} \frac{7\pi}{18} \operatorname{tg} \frac{\pi}{18}}$.

$$\frac{9}{9\sqrt{2}+1}$$

14. Докажите тождества:

а) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha}$;

б) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha}$.

15. Найдите область значений функции $f(x) = \sin x - \sqrt{3} \cos x$.

$$[2; 2]$$