

Уравнения в целых числах

1. (*Математический праздник, 2003, 6.1*) Один мальчик 16 февраля 2003 года сказал: «Разность между числами прожитых мною (полных) месяцев и прожитых (полных) лет сегодня впервые стала равна 111». Когда он родился?

16 января 1961 год

2. (*Математический праздник, 2005, 6.2*)

На автобусе ездил Андрей
На кружок и обратно домой,
Заплатив 115 рублей,
Покупал он себе проездной.
В январе он его не достал,
И поэтому несколько дней
У шофёра билет покупал
Он себе за 15 рублей.
А в иной день кондуктор с него
Брал 11 только рублей.
Возвращаясь с кружка своего
Всякий раз шёл пешком наш Андрей.
За январь сколько денег ушло,
Посчитал бережливый Андрей:
С удивлением он получил
Аккурат 115 рублей!
Сосчитайте теперь поскорей,
Сколько раз был кружок в январе?

6 раз

3. (*Математический праздник, 1994, 6.3*) Несколько одинаковых по численности бригад сторожей спали одинаковое число ночей. Каждый сторож проспал больше ночей, чем сторожей в бригаде, но меньше, чем число бригад. Сколько сторожей в бригаде, если все сторожа вместе проспали 1001 человеко-ночь?

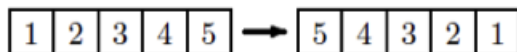
2

4. (*Математический праздник, 1994, 7.2*) Во всех подъездах дома одинаковое число этажей, а на каждом этаже одинаковое число квартир. При этом число этажей в доме больше числа квартир на этаже, число квартир на этаже больше числа подъездов, а число подъездов больше одного. Сколько этажей в доме, если всего в нём 105 квартир?

- Найдите хотя бы одно решение.
- Найдите все решения и докажите, что других нет.

2

5. (Московская устная олимпиада, 2017, 6–7.4) Петров забронировал квартиру в доме-новостройке, в котором пять одинаковых подъездов. Изначально подъезды нумеровались слева направо, и квартира Петрова имела номер 636. Потом застройщик поменял нумерацию на противоположную (справа налево, см. рисунок). Тогда квартира Петрова стала иметь номер 242. Сколько квартир в доме? (Порядок нумерации квартир внутри подъезда не изменялся.)



986

6. (Математический праздник, 2001, 6.5) Вифсла, Тофсла и Хемуль играли в снежки. Первый снежок бросил Тофсла. Затем в ответ на каждый попавший в него снежок Вифсла бросал 6 снежков, Хемуль — 5, а Тофсла — 4. Через некоторое время игра закончилась. Найдите, в кого сколько снежков попало, если мимо цели пролетели 13 снежков. (В себя самого снежками не кидаются и один снежок не может попасть в двоих.)

В каждой по одному снежку

7. (Московская устная олимпиада, 2015, 6.5) Может ли в равенстве

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

одно из чисел x , y или z быть однозначным, другое — двузначным, третье — трёхзначным?

8. (Московская устная олимпиада, 2002, 6.5) Шехерезада стала учительницей математики и задала школьникам на дом 1001 задачу. За каждую решённую задачу она начисляла 2 балла, за каждую неправильно решённую задачу штрафовала на один балл, а за каждую задачу, которую школьник не решал, штрафовала на пятьдесят баллов. Шахрияр правильно решил меньше 900 задач и набрал 1514 баллов. Сколько задач правильно решил Шахрияр?

9. (Математический праздник, 2017, 6.5) Группа туристов делит печенье. Если они разделят поровну две одинаковые пачки, останется одно лишнее печенье. А если разделят поровну три такие же пачки, останется 13 лишних печений. Сколько туристов в группе?

23

10. (Математический праздник, 2015, 6.6) Юра начертил на клетчатой бумаге прямоугольник (по клеточкам) и нарисовал на нём картину. После этого он нарисовал вокруг картины рамку шириной в одну клеточку (см. рисунок). Оказалось, что площадь картины равна площади рамки. Какие размеры могла иметь Юрина картина? (Перечислите все варианты и докажете, что других нет.)



3 × 10 или 4 × 6 клеточек

11. («Ломоносов», 2018, 5–6.6) На клетчатой бумаге (сторона клетки 1 см) нарисован прямоугольник, стороны которого лежат на линиях сетки, причём одна сторона на 5 см меньше другой. Оказалось, что его можно разрезать по линиям сетки на несколько частей и сложить из них квадрат. Чему может быть равна сторона этого квадрата? Найдите все возможные значения.

9

12. («Ломоносов», 2018, 7–8.5) На клетчатой бумаге (сторона клетки 1 см) нарисован прямоугольник, стороны которого лежат на линиях сетки, причём одна сторона на 5 см меньше другой. Оказалось, что его можно разрезать по линиям сетки на несколько частей и сложить из них квадрат. Чему может быть равна сторона этого квадрата? Найдите все возможные значения.

9

13. (Математический праздник, 1993, 7.2) Зная, что число 1993 простое, выясните, существуют ли такие натуральные числа x и y , что

- а) $x^2 - y^2 = 1993$;
- б) $x^3 - y^3 = 1993$;
- в) $x^4 - y^4 = 1993$?

14. (Математический праздник, 1996, 7.3) Найдите хотя бы две пары натуральных чисел, для которых верно равенство $2x^3 = y^4$.

15. (Математический праздник, 2005, 7.4) Бумага расчерчена на клеточки со стороной 1. Ваня вырезал из неё по клеточкам прямоугольник и нашёл его площадь и периметр. Таня отобрала у него ножницы и со словами «Смотри, фокус!» вырезала с краю прямоугольника по клеточкам квадратик, квадратик выкинула и объявила: «Теперь у оставшейся фигуры периметр такой же, какая была площадь прямоугольника, а площадь — как был периметр!» Ваня убедился, что Таня права.

- а) Квадратик какого размера вырезала и выкинула Таня?
- б) Приведите пример такого прямоугольника и такого квадрата.
- в) Прямоугольник каких размеров вырезал Ваня?

а) 2×2 ; 6×3 или 4×4

16. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 7.6, 8.5, 9.4) Решите в натуральных числах уравнение

$$abc + ab + bc + ac + a + b + c = 164.$$

В ответе укажите произведение abc .

08

17. («*Покори Воробьёвы горы!*», 2015, 7.6) В ролевой игре «Worlds of MSU» имеются три класса: воин, маг, целитель. Каждый игрок может управлять персонажем некоторого класса (одиночный класс) или персонажем, совмещающим способности двух классов (двойной класс), например, маг-целитель. Партия из 32 игроков штурмует «Цитадель зла». Известно, что целителей (т. е. всех, имеющих способности целителей) в два раза больше магов и в k раз меньше, чем воинов (k — целое число, большее двух). Сколько игроков имеют одиночный класс, если известно, что игроков, имеющих двойной класс, на 2 больше, чем целителей?

97