

## Уравнения в целых числах

1. (*Математический праздник, 2003, 6.1*) Один мальчик 16 февраля 2003 года сказал: «Разность между числами прожитых мною (полных) месяцев и прожитых (полных) лет сегодня впервые стала равна 111». Когда он родился?

16 января 1961 год

2. (*Математический праздник, 2005, 6.2*)

На автобусе ездил Андрей  
На кружок и обратно домой,  
Заплатив 115 рублей,  
Покупал он себе проездной.  
В январе он его не достал,  
И поэтому несколько дней  
У шофёра билет покупал  
Он себе за 15 рублей.  
А в иной день кондуктор с него  
Брал 11 только рублей.  
Возвращаясь с кружка своего  
Всякий раз шёл пешком наш Андрей.  
За январь сколько денег ушло,  
Посчитал бережливый Андрей:  
С удивлением он получил  
Аккурат 115 рублей!  
Сосчитайте теперь поскорей,  
Сколько раз был кружок в январе?

6 раз

3. (*Математический праздник, 1994, 6.3*) Несколько одинаковых по численности бригад сторожей спали одинаковое число ночей. Каждый сторож проспал больше ночей, чем сторожей в бригаде, но меньше, чем число бригад. Сколько сторожей в бригаде, если все сторожа вместе проспали 1001 человеко-ночь?

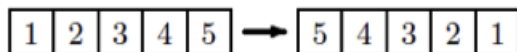
2

4. (*Математический праздник, 1994, 7.2*) Во всех подъездах дома одинаковое число этажей, а на каждом этаже одинаковое число квартир. При этом число этажей в доме больше числа квартир на этаже, число квартир на этаже больше числа подъездов, а число подъездов больше одного. Сколько этажей в доме, если всего в нём 105 квартир?

- Найдите хотя бы одно решение.
- Найдите все решения и докажите, что других нет.

2

5. (Московская устная олимпиада, 2017, 6–7.4) Петров забронировал квартиру в доме-новостройке, в котором пять одинаковых подъездов. Изначально подъезды нумеровались слева направо, и квартира Петрова имела номер 636. Потом застройщик поменял нумерацию на противоположную (справа налево, см. рисунок). Тогда квартира Петрова стала иметь номер 242. Сколько квартир в доме? (Порядок нумерации квартир внутри подъезда не изменялся.)



986

6. (Математический праздник, 2001, 6.5) Вифсла, Тофсла и Хемуль играли в снежки. Первый снежок бросил Тофсла. Затем в ответ на каждый попавший в него снежок Вифсла бросал 6 снежков, Хемуль — 5, а Тофсла — 4. Через некоторое время игра закончилась. Найдите, в кого сколько снежков попало, если мимо цели пролетели 13 снежков. (В себя самого снежками не кидаются и один снежок не может попасть в двоих.)

В каждой по одному снежку

7. (Московская устная олимпиада, 2015, 6.5) Может ли в равенстве

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

одно из чисел  $x$ ,  $y$  или  $z$  быть однозначным, другое — двузначным, третье — трёхзначным?

8. (Московская устная олимпиада, 2002, 6.5) Шехерезада стала учительницей математики и задала школьникам на дом 1001 задачу. За каждую решённую задачу она начисляла 2 балла, за каждую неправильно решённую задачу штрафовала на один балл, а за каждую задачу, которую школьник не решал, штрафовала на пятьдесят баллов. Шахрияр правильно решил меньше 900 задач и набрал 1514 баллов. Сколько задач правильно решил Шахрияр?

9. (Математический праздник, 2017, 6.5) Группа туристов делит печенье. Если они разделят поровну две одинаковые пачки, останется одно лишнее печенье. А если разделят поровну три такие же пачки, останется 13 лишних печений. Сколько туристов в группе?

23

10. (Математический праздник, 2015, 6.6) Юра начертил на клетчатой бумаге прямоугольник (по клеточкам) и нарисовал на нём картину. После этого он нарисовал вокруг картины рамку шириной в одну клеточку (см. рисунок). Оказалось, что площадь картины равна площади рамки. Какие размеры могла иметь Юрина картина? (Перечислите все варианты и докажете, что других нет.)



3 × 10 или 4 × 6 клеточек

11. («Ломоносов», 2018, 5–6.6) На клетчатой бумаге (сторона клетки 1 см) нарисован прямоугольник, стороны которого лежат на линиях сетки, причём одна сторона на 5 см меньше другой. Оказалось, что его можно разрезать по линиям сетки на несколько частей и сложить из них квадрат. Чему может быть равна сторона этого квадрата? Найдите все возможные значения.

9

12. («Ломоносов», 2018, 7–8.5) На клетчатой бумаге (сторона клетки 1 см) нарисован прямоугольник, стороны которого лежат на линиях сетки, причём одна сторона на 5 см меньше другой. Оказалось, что его можно разрезать по линиям сетки на несколько частей и сложить из них квадрат. Чему может быть равна сторона этого квадрата? Найдите все возможные значения.

9

13. («Надежда энергетики», 2021, 7.1) Зная, что  $2021 = 43 \cdot 47$ , решите в целых числах уравнение

$$x^2 + 4x = 2021.$$

$x = -47, 43$

14. («Ломоносов», 2023, 7–8.3) Найдите все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющих уравнению

$$x^2 - y^2 - 4x - 6y - 58 = 0.$$

15. («Покори Воробьёвы горы!», 2022, 7–8.4) Найдите все пары натуральных чисел  $(x, y)$ , для которых выполнено равенство

$$(x + y) \cdot (x + y + 1) + 2y = 100.$$

(4; 7)

16. (Математический праздник, 1993, 7.2) Зная, что число 1993 простое, выясните, существуют ли такие натуральные числа  $x$  и  $y$ , что

- а)  $x^2 - y^2 = 1993$ ;
- б)  $x^3 - y^3 = 1993$ ;
- в)  $x^4 - y^4 = 1993$ ?

17. (Математический праздник, 1996, 7.3) Найдите хотя бы две пары натуральных чисел, для которых верно равенство  $2x^3 = y^4$ .

18. (*Математический праздник, 2005, 7.4*) Бумага расчерчена на клеточки со стороной 1. Ваня вырезал из неё по клеточкам прямоугольник и нашёл его площадь и периметр. Таня отобрала у него ножницы и со словами «Смотри, фокус!» вырезала с краю прямоугольника по клеточкам квадратик, квадратик выкинула и объявила: «Теперь у оставшейся фигуры периметр такой же, какая была площадь прямоугольника, а площадь — как был периметр!» Ваня убедился, что Таня права.

- а) Квадратик какого размера вырезала и выкинула Таня?
- б) Приведите пример такого прямоугольника и такого квадрата.
- в) Прямоугольник каких размеров вырезал Ваня?

а)  $2 \times 2$  или  $10 \times 3$ ;  $2 \times 2$  или  $9 \times 4$

19. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 7.6, 8.5, 9.4*) Решите в натуральных числах уравнение

$$abc + ab + bc + ac + a + b + c = 164.$$

В ответе укажите произведение  $abc$ .

08

20. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 7.6*) В ролевой игре «Worlds of MSU» имеются три класса: воин, маг, целитель. Каждый игрок может управлять персонажем некоторого класса (одиночный класс) или персонажем, совмещающим способности двух классов (двойной класс), например, маг-целитель. Партия из 32 игроков штурмует «Цитадель зла». Известно, что целителей (т. е. всех, имеющих способности целителей) в два раза больше магов и в  $k$  раз меньше, чем воинов ( $k$  — целое число, большее двух). Сколько игроков имеют одиночный класс, если известно, что игроков, имеющих двойной класс, на 2 больше, чем целителей?

26