

## Задачи с параметрами на ЕГЭ по математике

Здесь приведены задачи с параметрами, которые предлагались на ЕГЭ по математике (профильный уровень, сложная часть), а также на диагностических, контрольных и тренировочных работах МИОО начиная с 2009 года.

**138.** (ЕГЭ, 2022) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$|x^2 + a^2 - 6x - 4a| = 2x + 2a$$

имеет четыре различных корня.

$$\left( \frac{9}{4} + 1; 0 \right) \cap \left( 1 - \frac{9}{4}; -1 \right)$$

**137.** (ЕГЭ, 2022) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$a^2 - ax - 2x^2 - 6a + 3x + 9|x| = 0$$

имеет четыре различных корня.

$$(9; \frac{7}{4}) \cap (\frac{7}{4}; 2) \cap (2; 0)$$

**136.** (ЕГЭ, 2022) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$a^2 - x^2 + 2|x| - 1 = 0$$

имеет ровно два различных корня.

$$(\infty + ; 1) \cap \{0\} \cap (1 - ; \infty -)$$

**135.** (ЕГЭ, 2022) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x^4 - 4x^2 + a^2} = x^2 + 2x - a$$

имеет ровно три различных корня.

$$(-\infty; -4) \cup (-4; 0)$$

**134.** (ЕГЭ, 2022) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{xy^2 - 2xy - 4y + 8}{\sqrt{4-y}} = 0, \\ y = ax \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

$$(0; \frac{1}{4}) \cap (1; 0)$$

133. (ЕГЭ, 2021) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 - a} = \sqrt{y^2 + 1 - a}, \\ x^2 + y^2 = 8x + 6y \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

[01:2]

132. (ЕГЭ, 2021) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$|a - 2|x^4 - 2ax^2 + |a - 12|| = 0$$

имеет хотя бы два различных корня.

$(\infty+; \frac{1}{2}] \cap [\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$

131. (ЕГЭ, 2021) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$|x^2 - a^2| = |x + a|\sqrt{x + a^2 - 2a}$$

имеет ровно два различных корня.

$(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}] \cap (\frac{1}{2}; 0] \cap \{1-\}$

130. (ЕГЭ, 2021) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2^{\ln y} = 4^{|x|}, \\ \log_2(x^4 y^2 + 2a^2) = \log_2(1 - ax^2 y^2) + 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

[1 = 0]

129. (ЕГЭ, 2021) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$|x^2 - a^2| = |x + a|\sqrt{x + 5}$$

имеет ровно два различных корня.

$(\infty+; \frac{1}{2}) \cap \{1; \frac{1}{2} - ; \frac{1}{12} - \}$

128. (ЕГЭ, 2021) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$a|x + 1| + (1 - a)|x - 1| + 2 = 0$$

имеет ровно два различных корня.

$(\infty+; \frac{1}{2}) \cap (1-; \infty-)$

127. (ЕГЭ, 2020) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$\frac{9x^2 - a^2}{x^2 + 8x + 16 - a^2} = 0$$

имеет ровно два различных решения.

$$(\infty+;9) \cap (9;8) \cap (8;0) \cap (0;8-) \cap (8-;9-) \cap (9-;\infty-)$$

126. (ЕГЭ, 2020) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{4 - y^2} = \sqrt{4 - 4x^2}, \\ xy + a^2 = ax + ay \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

$$[7;1) \cap (1-;7-]$$

125. (ЕГЭ, 2020) Найдите все положительные значения  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{2x - x^2} = \sqrt{2ay - a^2y^2}, \\ y = x^2 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

$$(\infty+;1) \cap (1;\frac{5}{11}]$$

124. (ЕГЭ, 2020) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \log_7(36 - y^2) = \log_7(36 - a^2x^2), \\ x^2 + y^2 = 2x + 6y \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

$$(\infty+;8] \cap \{\frac{8}{1};0;\frac{8}{1}-\} \cap [8-;\infty-)$$

123. (ЕГЭ, 2020) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{16 - y^2} = \sqrt{16 - a^2x^2}, \\ x^2 + y^2 = 8x + 4y \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

$$(\infty+;7) \cap (7;\frac{7}{1}) \cap \{0\} \cap (\frac{7}{1}-;7-) \cap (7-;\infty-)$$

122. (ЕГЭ, 2020) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \log_3(a - x^2) = \log_3(a - y^2), \\ x^2 + y^2 = 4x + 6y \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

$$[25;1)$$

121. (ЕГЭ, 2020) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x + 2y, \\ x^2 + y^2 = 2(1+a)x + 2(1-a)y - 2a^2 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

(z;0) ∩ (0;z-)

120. (ЕГЭ, 2019) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x) = x - 2|x| + |x^2 - (2a + 1)x + a^2 + a|$$

больше  $-4$ .

(ε;1-)

119. (ЕГЭ, 2019) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$3 \sin x + \cos x = a$$

имеет ровно один корень на отрезке  $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ .

$\frac{0 \leq a < \sqrt{2}}{2} > a \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

118. (ЕГЭ, 2019) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$\frac{x^2 - 6x + a^2 + 2a}{2x^2 - ax - a^2} = 0$$

имеет ровно два различных корня.

(1 - 0 ≤ a < 2) ∩ (z;0) ∩ (0;4-) ∩ (4-;1 - 0 ≤ a -)

117. (ЕГЭ, 2019) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$\frac{x^2 + x + a}{x^2 - 2x + a^2 + 6a} = 0$$

имеет ровно два различных корня.

(1;0) ∩ (0;z-) ∩ (z-;9-) ∩ (9-;∞-)

116. (ЕГЭ, 2019) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$\frac{x^2 - 4x + a}{5x^2 - 6ax + a^2} = 0$$

имеет ровно два различных корня.

(4;ε) ∩ (ε;0) ∩ (0;5-) ∩ (5-;∞-)

115. (ЕГЭ, 2019) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$\frac{2a - x^2 + 3x}{x - a^2} = 0$$

имеет ровно два различных корня.

$$\left( \infty; \frac{8}{3} \right) \cap \left( \frac{8}{3}; 0 \right) \cap \left( 0; 1 \right) \cap \left( 1; \frac{8}{3} \right)$$

114. (ЕГЭ, 2019) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$\frac{x^2 - a(a+1)x + a^3}{\sqrt{2+x-x^2}} = 0$$

имеет ровно два различных корня.

$$\left( \frac{1}{2}; 1 \right) \cap \left( 1; 0 \right) \cap \left( 0; 1 \right)$$

113. (ЕГЭ, 2018) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x^2 + y^2 + 6x) \ln \frac{3x + 4y + a}{20} = 0, \\ (x^2 + y^2 + 6x)(x^2 + y^2 - 12x) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

$$[9; 87)$$

112. (ЕГЭ, 2018) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ 2xy = 3a^2 - 4a \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

$$\frac{1}{2}$$

111. (ЕГЭ, 2018) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2(a-4)x - 6ay + 10a^2 - 8a = 0, \\ y^2 = x^2 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

$$\left( \frac{1}{2}; \frac{5}{4} \right) \cap \left( \frac{5}{4}; 0 \right) \cap \left( 0; \frac{5}{4} \right)$$

110. (ЕГЭ, 2018) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x + ay - 5)(x + ay - 5a) = 0, \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

$$\left( \frac{1}{4}; 1 \right) \cap \left( 1; \frac{5}{4} \right) \cap \left( \frac{5}{4}; \frac{5}{4} \right)$$

109. (ЕГЭ, 2018) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y = (a + 3)x^2 + 2ax + a - 3, \\ y^2 = x^2 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{e}}; e\right) \cap (e; e-1) \cap (e-1; \frac{1}{2\sqrt{e}})$$

108. (ЕГЭ, 2018) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} ax^2 + ay^2 - (3a - 16)x + 3ay + 1 = 0, \\ x^2 + y = xy + x \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

$$(2\sqrt{e}; 4) \cap (0; \frac{e}{2\sqrt{e}}) \cap (\frac{e}{2\sqrt{e}}; \infty)$$

107. (ЕГЭ, 2018) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^4 - y^4 = 12a - 28, \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

$$(\infty; 2\sqrt{2} + 9) \cap (2\sqrt{2} - 9; 2)$$

106. (ЕГЭ, 2018) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$(4x - x^2)^2 - 32\sqrt{4x - x^2} = a^2 - 14a$$

имеет хотя бы один корень.

$$[4; 8] \cup [9; 14]$$

105. (ЕГЭ, 2018) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$(2 + |x + a|)^3 - (2 + |x + a|)^2 = (3 - x^2 - 2ax - 2a^2)^3 - (3 - x^2 - 2ax - 2a^2)^2$$

имеет хотя бы один корень.

$$[1; 1]$$

104. (ЕГЭ, 2017) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} |x| + |a| < 4, \\ x^2 + 16a \leq 8x + 48 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке  $[0; 1]$ .

$$8 - 2\sqrt{8} > a > 4 -$$

103. (ЕГЭ, 2017) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{3x-2} \cdot \ln(x-a) = \sqrt{3x-2} \cdot \ln(2x+a)$$

имеет ровно один корень на отрезке  $[0; 1]$ .

$$\frac{8}{7} > a \geq \frac{8}{1} - \frac{7}{1} > a > \frac{8}{4}$$

102. (ЕГЭ, 2017) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{3-5x} \cdot \ln(4x^2 - a^2) = \sqrt{3-5x} \cdot \ln(2x+a)$$

имеет ровно один корень.

$$\frac{8}{9} > a \geq \frac{8}{1} - \frac{7}{1} \geq a > \frac{8}{9}$$

101. (ЕГЭ, 2017) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$\ln(4x-1) \cdot \sqrt{x^2 - 6x + 6a - a^2} = 0$$

имеет ровно один корень на отрезке  $[0; 3]$ .

$$\frac{7}{82} > a \geq \frac{7}{11} - \frac{7}{1} \geq a > \frac{7}{1}$$

100. (ЕГЭ, 2017) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$\operatorname{tg}(\pi x) \cdot \ln(x+a) = \ln(x+a)$$

имеет ровно один корень на отрезке  $[0; 1]$ .

$$1 < a - \frac{7}{8} = a - \frac{7}{1} = a - 0 > a > \frac{7}{1}$$

99. (ЕГЭ, 2017) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x-a} \cdot \sin x = \sqrt{x-a} \cdot \cos x$$

имеет ровно один корень на отрезке  $[0; \pi]$ .

$$a \geq a \geq \frac{7}{2} - 0 > a$$

98. (ЕГЭ, 2017) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$x\sqrt{x-a} = \sqrt{6x^2 - (6a+3)x + 3a}$$

имеет ровно один корень на отрезке  $[0; 1]$ .

$$1 \geq a \geq 9^{\wedge} - 8 - 0 > a$$

97. (ЕГЭ, 2017) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$\frac{(x-a-7)(x+a-2)}{\sqrt{10x-x^2-a^2}} = 0$$

имеет ровно один корень на отрезке  $[4; 8]$ .

$$1 \geq a > 7 - \frac{7}{8} - a = a - 8 - a > a > \frac{7}{17^{\wedge} - 8}$$

96. (ЕГЭ, 2017) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} ax \geq 2, \\ \sqrt{x-1} > a, \\ 3x \leq 2a + 11 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке  $[3; 4]$ .

$$\left( \frac{9}{1} \wedge \frac{2}{1} \right]$$

95. (Санкт-Петербург, пробный ЕГЭ, 2017) Найдите все такие значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{a \sin x + \cos x} = \sqrt{a \cos x + \sin x}$$

имеет решения на отрезке  $\left[ \frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4} \right]$ .

$$\{1\} \cap [1; \infty)$$

94. (МИОО, 2017) Найдите все значения  $a$ , для каждого из которых уравнение

$$4^x + (a-6) \cdot 2^x = (2+3|a|) \cdot 2^x + (a-6)(3|a|+2)$$

имеет единственное решение.

$$(\infty+; 9] \cap \{1; 2\}$$

93. (МИОО, 2017) Найдите все значения  $a$ , при которых уравнение

$$(2x + a + 1 + \operatorname{tg} x)^2 = (2x + a - 1 - \operatorname{tg} x)^2$$

имеет единственный корень на отрезке  $\left[ -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$ .

$$(\infty+; \frac{1}{2}] \cap \left\{ \frac{2}{2} \right\} \cap [2; \infty)$$

92. (МИОО, 2017) Найдите все значения  $a$ , при которых уравнение

$$(2x + \ln(x+2a))^2 = (2x - \ln(x+2a))^2$$

имеет единственный корень на отрезке  $[0; 1]$ .

$$(\infty+; \frac{2}{1}] \cap \{0\}$$

91. (МИОО, 2017) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x^4 - 16x^2 + 64a^2} = x^2 + 4x - 8a$$

имеет ровно три решения.

$$(0; 2-) \cap (2; \infty)$$



90. (МИОО, 2017) Найдите все неотрицательные значения параметра  $a$ , при каждом из которых множество решений неравенства

$$1 \leq \frac{a + x^2 - 4 \log_{0,5}(a^2 - 2a + 4)}{3\sqrt{7x^4 + x^2} + a + 4 + \log_{0,5}^2(a^2 - 2a + 4)}$$

состоит из одной точки, и найдите это решение.

$$\boxed{z = v \text{ или } 0 = v \text{ или } 0 = x}$$

89. (МИОО, 2017) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} ((x-5)^2 + (y-3)^2 - 9)((x-2)^2 + (y+1)^2) \leq 0, \\ y = ax + a + 3 \end{cases}$$

не имеет решений.

$$\boxed{\left(\infty + ; \frac{8}{1}\right) \left(\frac{8}{1} - ; \frac{8}{1}\right) \cap \left(\frac{8}{1} - ; \infty -\right)}$$

88. (МИОО, 2017) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2(x-y)a = 9 - 6a - a^2, \\ x^2 + y^2 + 2(3x+4y)a = 1 - 2a - 24a^2 \end{cases}$$

не имеет решений.

$$\boxed{\left(\infty + ; \frac{1}{1}\right) \left(\frac{1}{1} - ; \frac{1}{1}\right) \cap \left(\frac{1}{1} - ; \infty -\right)}$$

87. (МИОО, 2017) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} \sqrt{(x-a)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y+a)^2} = |a\sqrt{2}|, \\ x^2 + y^2 \leq 8 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$\boxed{0; \sqrt{2}}$$

86. (МИОО, 2017) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых множество значений функции

$$y = \frac{5a - 15x + ax}{x^2 - 2ax + a^2 + 25}$$

содержит отрезок  $[0; 1]$ .

$$\boxed{\left(\infty + ; \frac{1}{1}\right) \cap \left(\frac{1}{1} - ; \frac{1}{1}\right) \cap \left[\frac{1}{1} - ; \infty -\right]}$$

85. (ЕГЭ, 2016) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x^4 - x^2 + a^2} = x^2 + x - a$$

имеет ровно три различных корня.

$$\boxed{(0; 1) \cap (1; \infty)}$$

84. (ЕГЭ, 2016) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$2^x - a = \sqrt{4^x - a}$$

имеет единственный корень.

[1;0) ∪ (0;1-)

83. (ЕГЭ, 2016) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x} + \sqrt{2a - x} = a$$

имеет ровно два различных корня.

[2;4]

82. (ЕГЭ, 2016) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x(x^2 + y^2 - y - 2) = |x|(y - 2), \\ y = x + a \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

$(\sqrt{2}; 2; \sqrt{2}) \cap (2; 0] \cap \{\sqrt{2} - 1\}$

81. (ЕГЭ, 2016) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x(x^2 + y^2 + y - x - 2) = |x|(x^2 + y^2 - y + x), \\ y = a(x + 2) \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

$\{\frac{\sqrt{2}}{1}\} \cap (\frac{2}{1} - ; \frac{\sqrt{2}}{1} -)$

80. (ЕГЭ, 2016) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x - 3)(y + 3x - 9) = |x - 3|^3, \\ y = x + a \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

(1;8-) ∪ (8-;2-)

79. (ЕГЭ, 2016) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (xy^2 - 2xy - 6y + 12)\sqrt{6 - x} = 0, \\ y = ax \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

$\{\frac{6}{2}\} \cap [\frac{6}{1}; \frac{9}{1})$

78. (ЕГЭ, 2016) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{xy^2 - 3xy - 3y + 9}{\sqrt{x+3}} = 0, \\ y = ax \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

$$\{\varepsilon\} \cap \left[\frac{\varepsilon}{7}; 0\right)$$

77. (МИОО, 2016) Найдите все значения параметра  $\alpha$  из интервала  $(0; \pi)$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4(x+y)\sin\alpha + 8\sin^2\alpha = 2\sin\alpha - 1, \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2\sin\alpha + 4\sin^2\alpha \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$\frac{9}{x^5}, \frac{9}{x}$$

76. (МИОО, 2016) Найдите все неотрицательные значения  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{(x+2)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-a)^2} = \sqrt{4+a^2}, \\ 5y = |6-a^2| \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$[9; 1]$$

75. (МИОО, 2016) Найдите все значения параметра  $b$ , при каждом из которых уравнение

$$x^3 + 4x^2 - x \log_2(b-3) + 6 = 0$$

имеет единственное решение на отрезке  $[-2; 2]$ .

$$(\infty + ; 1227\varepsilon) \cap \{1\varepsilon0\varepsilon\} \cap \left[\frac{881}{128}; \varepsilon\right)$$

74. (МИОО, 2016) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} ((x-3)^2 + (y+4)^2 - 17)((2x+7)^2 + (2y-9)^2) \leq 0, \\ ax + y = 1 \end{cases}$$

не имеет решений.

$$\left(\frac{\varepsilon}{1}; -4\right)$$

73. (МИОО, 2016) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x-3a+1)^2 + (y+2a)^2 = a-1, \\ 4x+3y = a+1 \end{cases}$$

имеет более одного решения.

$$\{\varepsilon; 1\}$$

72. (МИОО, 2015) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2(2y - x)a = 1 + 2a - 4a^2, \\ x^2 + y^2 + 4(x - y)a = 4 + 4a - 7a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$\left[ \frac{2}{7}; \frac{2}{8} \right]$$

71. (ЕГЭ, 2015) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 2x + y^2 + 4y = 4|2x - y|, \\ x + 2y = a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

$$\left( \frac{2}{3} \wedge \frac{2}{3} \right) \cap \left[ 0; \frac{2}{3} \wedge \frac{2}{3} \right]$$

70. (ЕГЭ, 2015) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} |x^2 - 2x| - x^2 = |y^2 - 2y| - y^2, \\ x + y = a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

$$[1; 0]$$

69. (ЕГЭ, 2015) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (y^2 - xy + x - 3y + 2) \sqrt{x + 3} = 0, \\ a - x - y = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

$$\{0\} \cap [-4; -7]$$

68. (ЕГЭ, 2015) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2x - 2y - 2 = |x^2 + y^2 - 1|, \\ y = a(x - 1) \end{cases}$$

имеет более двух решений.

$$[2; 1]$$

67. (ЕГЭ, 2015) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} y(y - 7) = xy - 5(x + 2), \\ x \leq 6, \\ \frac{a(x - 6) - 2}{y - 2} = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$(-1; 0] \cap \left\{ \frac{8}{11} - \frac{8}{9} - \right\}$$

66. (ЕГЭ, 2015) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{(y^2 - xy - 4y + 2x + 4)\sqrt{x + 4}}{\sqrt{5 - y}} = 0, \\ a = x + y \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$(\infty + ; 8] \cap \{7\} \cap [9 - ; \infty -)$$

65. (МИОО, 2015) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 = 5xy, \\ (x - a)^2 + (y - a)^2 = 5a^4 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

$$\frac{8}{11} \mp$$

64. (МИОО, 2015) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (a - 1)x^2 + 2ax + a + 4 \leq 0, \\ ax^2 + 2(a + 1)x + a + 1 \geq 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$\frac{8}{11} \mp$$

63. (МИОО, 2015) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (x - 1)(x + 2) \leq 0, \\ 8x^2 + 8y^2 - 16a(x - y) + 15a^2 - 48y - 50a + 72 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$7; 0; -2; \frac{7}{9} -$$

62. (МИОО, 2015) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых множество значений функции

$$y = \frac{a + 3x - ax}{x^2 + 2ax + a^2 + 1}$$

содержит отрезок  $[0; 1]$ .

$$(\infty+; 9) \cap \left( 9; \frac{9}{9\sqrt{2}+2} \right] \cap \left[ \frac{9}{9\sqrt{2}-2}; \infty- \right)$$

61. (ЕГЭ, 2014) Найдите все значения  $a$ , при которых уравнение

$$(\log_6(x+a) - \log_6(x-a))^2 - 4a(\log_6(x+a) - \log_6(x-a)) + 3a^2 + 4a - 4 = 0$$

имеет ровно два решения.

$$(\infty+; 2) \cap \left( 2; \frac{9}{2} \right) \cap (2-; \infty-)$$

60. (ЕГЭ, 2014) Найдите все значения  $a$ , при которых уравнение

$$((a-2)x^2 + 6x)^2 - 4((a-2)x^2 + 6x) + 4 - a^2 = 0$$

имеет ровно два решения.

$$(\infty+; 5) \cap \{2; 0\} \cap (1-; \infty-)$$

59. (ЕГЭ, 2014) Найдите все значения  $a$ , при которых уравнение

$$\left(x + \frac{1}{x-a}\right)^2 - (a+9)\left(x + \frac{1}{x-a}\right) + 2a(9-a) = 0$$

имеет ровно четыре решения.

$$(\infty+; \frac{9}{11}) \cap \left(\frac{9}{2}; 9\right) \cap (9; 2) \cap (2-; \infty-)$$

58. (ЕГЭ, 2014) Найдите все значения  $a$ , при которых уравнение

$$(\operatorname{tg} x + 6)^2 - (a^2 + 2a + 8)(\operatorname{tg} x + 6) + a^2(2a + 8) = 0$$

имеет на отрезке  $[0; \frac{3\pi}{2}]$  ровно два решения.

$$\{1\} \cap (1-; 2-) \cap (2-; 9\sqrt{-})$$

57. (ЕГЭ, 2014) Найдите все значения параметра  $a$ , при которых для любого действительного  $x$  выполнено неравенство

$$|3 \sin x + a^2 - 22| + |7 \sin x + a + 12| \leq 11 \sin x + |a^2 + a - 20| + 11.$$

$$(\infty+; 9) \cap \{9-\}$$

56. (ЕГЭ, 2014) Найдите все значения  $a$ , при которых любое решение уравнения

$$4\sqrt[3]{3,5x - 2,5} + 3\log_2(3x - 1) + 2a = 0$$

принадлежит отрезку  $[1; 3]$ .

$$\left[\frac{5}{2}; \frac{5}{21}\right]$$

55. (ЕГЭ, 2014) Найдите все значения  $a$ , при которых уравнение

$$\sqrt{x^4 + (a - 5)^4} = |x + a - 5| + |x - a + 5|$$

имеет единственное решение.

$$[2; 8]$$

54. (Санкт-Петербург, пробный ЕГЭ, 2014) Найдите все значения  $a$ , при которых неравенство

$$\log_a \frac{3 + 2x^4}{1 + x^4} + \log_a \frac{5 + 4x^4}{1 + x^4} > 1$$

выполняется для всех действительных значений  $x$ .

$$[8; 1]$$

53. (МИОО, 2014) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$|(x - 1)^2 - 2^{1-a}| + |x - 1| + (1 - x)^2 + 2^{a-1} = 4 + 4^a$$

имеет единственное решение. Найдите это решение для каждого значения  $a$ .

$$[1 = x; 1 - = v]$$

52. (МИОО, 2013) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$|x - a^2 + a + 2| + |x - a^2 + 3a - 1| = 2a - 3$$

имеет корни, но ни один из них не принадлежит интервалу  $(4; 19)$ .

$$(\infty + ; 9] \cap [8; \frac{5}{8}]$$

51. (ЕГЭ, 2013) Найти все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$\frac{7a}{a - 5} \cdot 2^{|x|} = 4^{|x|} + \frac{12a + 17}{a - 5}$$

имеет ровно два различных корня.

$$(5; 2-) \cap \{0; 2; 1-\}$$

50. (ЕГЭ, 2013) Найти все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$a^2 - 10a + 5\sqrt{x^2 + 25} = 4|x - 5a| - 8|x|$$

имеет хотя бы один корень.

$$\left[ \frac{1}{2} \sqrt{10} + \frac{1}{2} \sqrt{10} - 5 \right] \cap \{5\}$$

49. (ЕГЭ, 2013) Найти все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$|\sin^2 x + 2 \cos x + a| = \sin^2 x + \cos x - a$$

имеет на промежутке  $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$  единственный корень.

$$\left\{ \frac{1}{2} \right\} \cap [0; \infty)$$

48. (ЕГЭ, 2013) Найти все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$x^2 + (a + 7)^2 = |x - 7 - a| + |x + a + 7|$$

имеет единственный корень.

$$\{6\}$$

47. (ЕГЭ, 2013) Найти все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$ax + \sqrt{3 - 2x - x^2} = 4a + 2$$

имеет единственный корень.

$$\{0\} \cap \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$$

46. (ЕГЭ, 2013) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$(4 \cos x - 3 - a) \cos x - 2,5 \cos 2x + 1,5 = 0$$

имеет хотя бы один корень.

$$(\infty; 0] \cap [9; \infty)$$

45. (ЕГЭ, 2013) Найдите все значения  $a$ , для каждого из которых уравнение

$$\log_{1-x}(a - x + 2) = 2$$

имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку  $[-1; 1)$ .

$$[1; 1) \cap \left(1; \frac{1}{2}\right]$$

44. (ФЦТ, 2013) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$|\cos x + 3 \sin x + a| = a - 3 \cos x - \sin x$$

имеет хотя бы одно решение на промежутке  $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ .

$$[1; 1)$$



43. (МИОО, 2013) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$\frac{1 - 2a\sqrt{1+x^2} + a(1+x^2)}{1+x^2 - 2\sqrt{1+x^2}} = 3$$

имеет хотя бы одно решение.

$$(\infty+; \frac{1}{2}] \cap (\frac{1}{2}; \infty-)$$

42. (МИОО, 2013) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$\frac{4^{-x^2} - a \cdot 2^{1-x^2} + a}{2^{1-x^2} - 1} = 3$$

имеет хотя бы одно решение.

$$(\infty+; \frac{1}{2}] \cap (\frac{1}{2}; \infty-)$$

41. (МИОО, 2012) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых на интервале  $(1; 2)$  существует хотя бы одно число  $x$ , **не** удовлетворяющее неравенству  $a + \sqrt{a^2 - 2ax + x^2} \leq 3x - x^2$ .

$$(\infty+; \frac{2}{3})$$

40. (ЕГЭ, 2012) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых неравенство

$$\left| \frac{x^2 + ax + 1}{x^2 + x + 1} \right| < 3$$

выполняется при всех  $x$ .

$$(\frac{1}{3}; \frac{1}{2})$$

39. (ЕГЭ, 2012) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x) = 4x^2 + 4ax + a^2 - 2a + 2$$

на множестве  $1 \leq |x| \leq 3$  не меньше 6.

$$(\infty+; \frac{1}{2}] \cap \{0\} \cap [\frac{1}{2}; \infty-)$$

38. (ЕГЭ, 2012) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$\frac{2}{x+1} = a|x-3|$$

на промежутке  $[0; +\infty)$  имеет более двух корней.

$$[\frac{2}{3}; \frac{2}{3})$$

37. (ЕГЭ, 2012) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$\left| \frac{5}{x} - 3 \right| = ax - 2$$

на промежутке  $(0; +\infty)$  имеет более двух корней.

$\left( \frac{7}{5}; \frac{5}{9} \right)$

36. (ЕГЭ, 2012) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых неравенство

$$|x^2 - 8x + a + 5| > 10$$

не имеет решений на отрезке  $[a - 6; a]$ .

$\left[ \frac{7}{69\sqrt{+2}}; \frac{7}{5\sqrt{-61}} \right]$

35. (ЕГЭ, 2012) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{1 - 2x} = a - 7|x|$$

имеет более двух корней.

$\left( \frac{7}{25}; \frac{7}{7} \right]$

34. (ЕГЭ, 2012) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$x^{10} + (a - 2|x|)^5 + x^2 - 2|x| + a = 0$$

имеет более трёх различных решений.

$(1; 0)$

33. (МИОО, 2012) При каких  $a$  уравнение  $|x^2 - 2x - 3| - 2a = |x - a| - 1$  имеет ровно три корня?

$\frac{71}{56}$  или  $0$

32. (Москва, репетиционный ЕГЭ, 2012) При каких значениях  $a$  уравнение  $|x + a^2| = |a + x^2|$  имеет ровно три корня?

$\frac{7}{\sqrt{-1}}; \frac{7}{\sqrt{+1}}; 1; 0$

31. (Санкт-Петербург, репетиционный ЕГЭ, 2012) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (y - 2x)(2y - x) \leq 0, \\ \sqrt{(x + a)^2 + (y - a)^2} = \frac{|a + 1|}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

$\frac{7}{1}$  или  $\frac{7}{1}$

30. (Федеральный центр тестирования, 2012) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$ax - 1 = \sqrt{8x - x^2 - 15}$$

имеет единственное решение.

$$\left\{ \frac{91}{8} \right\} \cap \left( \frac{6}{1}; \frac{5}{1} \right]$$

29. (Юг, пробный ЕГЭ, 2012) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y^2 + a = 4 \cos x, \\ \sqrt{y} + z^2 = a, \\ (a - 2)^2 = |z^2 - 2z| + |\sin 2x| + 4 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и укажите решения системы для каждого из найденных значений  $a$ .

$$\text{лэн ыннэшнр в хнхрбн илн; } \mathbb{Z} \ni y \text{ элн } 4, y = v \text{ илн } (z; 0; 2\pi k; 0; \mathbb{Z} \ni u \text{ элн } 0 = v \text{ при } (0; 0; \pi n; 0 + \frac{\pi}{2})$$

28. (МИОО, 2011) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых наименьшее значение функции  $f(x) = 4ax + |x^2 - 6x + 5|$  больше, чем  $-24$ .

$$\left( \frac{\pi}{6\sqrt{3}+3}; \frac{\pi}{6\sqrt{3}-3} \right)$$

27. (ЕГЭ, 2011) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + (4a + 5)x + 3a^2 + 5a < 0, \\ x^2 + a^2 = 25 \end{cases}$$

имеет решения.

$$\left( \frac{\pi}{2\sqrt{3}}; 0 \right) \cap \left( \pi - \frac{\pi}{2\sqrt{3}}; \pi \right)$$

26. (ЕГЭ, 2011) Найдите все положительные значения  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (|x| - 5)^2 + (y - 4)^2 = 4, \\ (x + 2)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$3 \text{ или } 2 + \sqrt{9}$$

25. (ЕГЭ, 2011) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$x^2 - 8x = 2|x - a| - 16$$

имеет ровно три различных решения.

$$\frac{7}{6}; 4; \frac{7}{2}$$

24. (ЕГЭ, 2011) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (x-4)^2 + (y-4)^2 = 9, \\ y = |x-a| + 1 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

$$\boxed{[-3\sqrt{2}; 4; 1+3\sqrt{2}]}$$

23. (ЕГЭ, 2011) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} y = \sqrt{12+4x-x^2} + 2, \\ y = \sqrt{16-a^2+2ax-x^2} + a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$\boxed{[9; 2) \cup (2; 7]}$$

22. (ЕГЭ, 2011) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (|x|-4)^2 + (|y|-4)^2 = 4, \\ y = ax + 1, \\ xy > 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$\boxed{\frac{9}{2\sqrt{10}+1}; \frac{9}{12\sqrt{9}}}$$

21. (ЕГЭ, 2011) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} 5 \cdot 2^{|x|} + 6|x| + 7 = 5y + 6x^2 + 4a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$\boxed{\frac{1}{2}}$$

20. (Москва, репетиционный ЕГЭ, 2011) Найдите все значения параметра  $b$ , при каждом из которых корни уравнения

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = b$$

существуют и принадлежат отрезку  $[2; 17]$ .

$$\boxed{[8; 1]}$$

19. (Санкт-Петербург, репетиционный ЕГЭ, 2011) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 4|y - 3| = 12 - 3|x|, \\ y^2 - a^2 = 3(2y - 3) - x^2 \end{cases}$$

имеет ровно четыре решения.

$$\left( \frac{4}{3}; 4 \right) \cup \left\{ \frac{5}{12} \right\} \cup \left\{ \frac{5}{12} \right\} \cup \left( -4; -3 \right)$$

18. (МИОО, 2011) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |x + 2y + 1| \leq 11, \\ (x - a)^2 + (y - 2a)^2 = 2 + a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$[-2; 3]$$

17. (МИОО, 2010) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} y^2 + xy - 4x - 9y + 20 = 0, \\ y = ax + 1, \\ x > 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$\left( \frac{7}{6}; 1 \right) \cup [0; 1)$$

16. (МИОО, 2010) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых неравенство

$$||x^2 - 2x - 3| - x^2 + 2x - 5| \leq \frac{1}{3} \left( a^2 - \frac{a}{2} \right) - x^2 + 2x + 1$$

имеет единственное целое решение.

$$\left( \frac{7}{3}; 2 \right)$$

15. (МИОО, 2010) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых наибольшее значение функции  $f(x) = x^2 - 7|x - a| - 3x$  на отрезке  $[-6; 6]$  принимается хотя бы на одном из концов этого отрезка.

$$[\infty; 4] \cup [2; \infty)$$

14. (ЕГЭ, 2010) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$36^x - (8a + 5) \cdot 6^x + 16a^2 + 20a - 14 = 0$$

имеет единственное решение.

$$\left[ \frac{7}{1}; \frac{1}{2} \right)$$

13. (ЕГЭ, 2010) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых наименьшее значение функции  $f(x) = 4ax + |x^2 - 8x + 7|$  меньше 1.

$$\left(\infty + ; \frac{7}{9}\right) \cap \left(\frac{7}{1} ; \infty -\right)$$

12. (ЕГЭ, 2010) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых функция

$$f(x) = x^2 - 2|x - a^2| - 6x$$

имеет более двух точек экстремума.

$$\left(\frac{7}{2} ; \frac{7}{2}\right) \cap \left(\frac{7}{2} ; \infty -\right)$$

11. (ЕГЭ, 2010) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых ровно одно решение неравенства  $x^2 + (5a + 3)x + 4a^2 \leq 4$  удовлетворяет неравенству  $ax(x - 4 - a) \leq 0$ .

$$\left[1 ; 1 - \frac{7}{8} - \frac{8}{9} -\right)$$

10. (МИОО, 2010) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых среди значений функции

$$y = \frac{x^2 - 2x + a}{6 + x^2}$$

есть ровно одно целое число.

$$\left(\frac{11}{1} ; \frac{11}{1}\right)$$

9. (МИОО, 2010) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$\cos\left(\frac{10x - 2x^2 - a}{3}\right) - \cos(2x + a) = x^2 - 8x - a$$

имеет единственное решение.

$$\left[9 ; \infty -\right)$$

8. (МИОО, 2010) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$64^{x+a} - 4^{x^2-5x+4a} = x^2 - 8x + a$$

не имеет действительных решений.

$$\left(\infty + ; 9\right)$$

7. (МИОО, 2010) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых множеством решений неравенства  $\sqrt{5-x} + |x+a| \leq 3$  является отрезок.

$$\left(\frac{7}{2} ; \frac{7}{2}\right) \cap \left[\frac{7}{6} ; 8 -\right)$$

6. (Москва, репетиционный ЕГЭ, 2010) Найдите наименьшее значение параметра  $a$ , при котором функция

$$y = 9 + 7x - 3|ax + 2| + |ax + 5| + |x + 1|$$

является неубывающей на всей числовой прямой.

$$\left[\frac{7}{2} -\right)$$

5. (МИОО, 2009) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} \frac{x - ax - a}{x - 2 + 2a} \geq 0, \\ x - 8 > ax \end{cases}$$

не имеет решений.

[8:1]

4. (МИОО, 2009) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$\cos(\sqrt{a^2 - x^2}) = 1$$

имеет ровно восемь различных решений.

(18:19) ∩ (19-:18-)

3. (МИОО, 2009) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$3x + |2x + |a - x|| = 7|x + 2|$$

имеет хотя бы один корень.

(∞+:8] ∩ [1-:∞-)

2. (МИОО, 2009) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых решения неравенства

$$|2x - a| + 1 \leq |x + 3|$$

образуют отрезок длины 1.

$\frac{7}{61} - \frac{7}{9} -$

1. (МИОО, 2009) Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых график функции

$$f(x) = x^2 - |x^2 + 2x - 3| - a$$

пересекает ось абсцисс более чем в двух различных точках.

(1: $\frac{7}{2}$ -)