Показательные уравнения и неравенства на ЕГЭ по математике

Здесь приведены показательные уравнения и неравенства, которые предлагались на ЕГЭ по математике (профильный уровень, сложная часть), а также на диагностических, контрольных и тренировочных работах МИОО начиная с 2009 года.

60. (*ЕГЭ, 2025*) Решите неравенство:

$$\frac{8x^3-4x^2-2x+1}{16^{x^2}-4\cdot 4^{x^2}+4}\leqslant 0.$$

$\boxed{x\in\left(-\infty;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{1}{2}\right]\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}}$

59. (*ЕГЭ, 2025*) Решите неравенство:

$$\frac{1}{3^x+4}\leqslant\frac{2}{3^{x+1}-1}.$$

$\boxed{x\in(-1;2]}$

58. (*ЕГЭ, 2025*) Решите неравенство:

$$\frac{2^x}{2^x-8}+\frac{2^x+8}{2^x-4}+\frac{66}{4^x-12\cdot 2^x+32}\leqslant 0.$$

$\boxed{x\in(2;3)\cup\{0\}}$

57. (*ЕГЭ, 2025*) Решите неравенство:

$$\frac{0{,}1^x-100}{4^x-2^{x+3{,}5}+32}\leqslant 0.$$

$\boxed{x\in[-2;2{,}5)\cup(2{,}5;+\infty)}$

56. (*ЕГЭ, 2024*) Решите неравенство:

$$\frac{2\cdot 8^{x-1}}{2\cdot 8^{x-1}-1}\geqslant\frac{3}{8^x-1}+\frac{8}{64^x-5\cdot 8^x+4}.$$

$\boxed{x\in(-\infty;0)\cup\left(\frac{2}{3};+\infty\right)\cup\left\{\frac{1}{3}\right\}}$

55. (*ЕГЭ, 2024*) Решите неравенство:

$$\frac{4^{x+1}+4^x-4}{16^x-9\cdot 4^x+8} \geqslant -1.$$

$\boxed{x \in (-\infty;0) \cup \left(\frac{3}{2};+\infty\right) \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}}$

54. (*ЕГЭ, 2024*) Решите неравенство:

$$2^{x+1}+0{,}5^{x-3} \geqslant 17.$$

$\boxed{x \in (-\infty;-1] \cup [3;+\infty)}$

53. (*ЕГЭ, 2023*) а) Решите уравнение:

$$8^x-5\cdot 2^{x+1}+16\cdot 2^{-x}=0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_5 2; \log_5 10]$.

$\boxed{\text{а) } 0{,}5;\ 1{,}5;\ \text{б) } 0{,}5}$

52. (*ЕГЭ, 2023*) Решите неравенство

$$4\cdot 4^{x^2+2x-5}-33\cdot 2^{x^2+2x-5}+8 \geqslant 0.$$

$\boxed{(-\infty;-4];\ [-3;1];\ [2;+\infty)}$

51. (*ЕГЭ, 2023*) Решите неравенство

$$\frac{4^x+2^{x+1}-36}{2^x-5}+\frac{4^{x+1}-2^{x+5}+4}{2^x-8} \leqslant 5\cdot 2^x+7.$$

$\boxed{(-\infty;2];\ (\log_2 5;3)}$

50. (*ЕГЭ, 2022*) Решите неравенство

$$\frac{4}{3^x-27} \geqslant \frac{1}{3^x-9}.$$

$\boxed{[1;2);\ (3;+\infty)}$

49. (*ЕГЭ, 2022*) Решите неравенство

$$3^x+\frac{243}{3^x-36} \geqslant 0.$$

$\boxed{[2;3];\ (\log_3 36;+\infty)}$

48. (*ЕГЭ, 2022*) Решите неравенство

$$3^x - \frac{702}{3^x - 1} \geqslant 0.$$

$\boxed{(-\infty; 0); [3; +\infty)}$

47. (*ЕГЭ, 2022*) Решите неравенство

$$2^x - \frac{240}{2^x - 1} \geqslant 0.$$

$\boxed{(-\infty; 0); [4; +\infty)}$

46. (*ЕГЭ, 2022*) Решите неравенство

$$\frac{2^{x+1} - 17 \cdot 2^{2-x}}{2^x - 2^{6-x}} \geqslant 1.$$

$\boxed{(-\infty; 1]; (3; +\infty)}$

45. (*ЕГЭ, 2021*) а) Решите уравнение:

$$3 \cdot 9^{x+1} - 5 \cdot 6^{x+1} + 8 \cdot 2^{2x} = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

$\boxed{\text{а) } -2;\ -1;\ \text{б) } -1}$

44. (*ЕГЭ, 2021*) Решите неравенство

$$\frac{1}{3^x - 1} + \frac{9^{x+\frac{1}{2}} - 3^{x+3} + 3}{3^x - 9} \geqslant 3^{x+1}.$$

$\boxed{(0; 1]; (2; +\infty)}$

43. (*ЕГЭ, 2021*) Решите неравенство

$$(4^x - 5 \cdot 2^x)^2 - 20\,(4^x - 5 \cdot 2^x) - 96 \leqslant 0.$$

$\boxed{(-\infty; 0]; [2; 3]}$

42. (*ЕГЭ, 2021*) Решите неравенство

$$\left(4^x - 2^{x+3}\right)^2 + 28\left(4^x - 2^{x+3}\right) + 192 \geqslant 0.$$

$\boxed{(-\infty; 1]; 2; [\log_2 6; +\infty)}$

41. (*ЕГЭ, 2021*) Решите неравенство

$$\frac{5^x}{5^x-4}+\frac{5^x+5}{5^x-5}+\frac{22}{25^x-9\cdot 5^x+20}\leqslant 0.$$

$\boxed{0;\ (\log_5 4;\ 1)}$

40. (*ЕГЭ, 2020*) Решите неравенство

$$27\cdot 45^x-27^{x+1}-12\cdot 15^x+12\cdot 9^x+5^x-3^x\leqslant 0.$$

$\boxed{(-\infty;-2];\ [-1;0]}$

39. (*ЕГЭ, 2019*) Решите неравенство

$$\frac{9^x+2\cdot 3^x-117}{3^x-27}\leqslant 1.$$

$\boxed{[2;3)}$

38. (*ЕГЭ, 2019*) Решите неравенство

$$\frac{25^{x^2+x-10}-(0{,}2)^{x^2-2x-7}}{0{,}5\cdot 4^{x-1}-1}\leqslant 0.$$

$\boxed{(-\infty;-3];\ \left(\frac{3}{2};3\right]}$

37. (*ЕГЭ, 2018*) Решите неравенство

$$\frac{2\cdot 5^{2x}-3\cdot 5^x\cdot 2^{x+1}+4^{x+1}}{10^x-2^{2x}}\leqslant 1.$$

$\boxed{(-\infty;0);\ (0;1]}$

36. (*ЕГЭ, 2018*) Решите неравенство

$$3^{x^2}\cdot 5^{x-1}\geqslant 3.$$

$\boxed{(-\infty;-1-\log_3 5];\ [1;+\infty)}$

35. (*ЕГЭ, 2018*) Решите неравенство

$$2\left(8^x+50^x\right)>20^x+3\cdot 125^x.$$

$\boxed{(-\infty;0)}$

34. (*ЕГЭ, 2017*) Решите неравенство

$$(4^x - 2^{x+2})^2 - 28(4^x - 2^{x+2}) - 128 \geqslant 0.$$

$\{1\} \cup [3; +\infty)$

33. (*ЕГЭ, 2017*) Решите неравенство

$$\frac{2 \cdot 4^{x-2}}{2 \cdot 4^{x-2} - 1} \geqslant \frac{7}{4^x - 1} + \frac{40}{16^x - 9 \cdot 4^x + 8}.$$

$(-\infty; 0) \cup \{1\} \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$

32. (*ЕГЭ, 2017*) Решите неравенство

$$\frac{8^{x+1} - 40}{2 \cdot 64^x - 32} \leqslant 1.$$

$\left\{\frac{1}{3}\right\} \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$

31. (*ЕГЭ, 2017*) Решите неравенство

$$4^{6x-x^2-4} - 34 \cdot 2^{6x-x^2-4} + 64 \geqslant 0.$$

$(-\infty; 1] \cup \{3\} \cup [5; +\infty)$

30. (*ЕГЭ, 2017*) а) Решите уравнение

$$8^x - 9 \cdot 2^{x+1} + 2^{5-x} = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_5 2; \log_5 20]$.

а) 2, $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{2}$

29. (*Санкт-Петербург, пробный ЕГЭ, 2017*) а) Решите уравнение

$$4^x - 2^{x+3} + 15 = 0.$$

б) Определите, какие из его корней принадлежат отрезку $\left[2; \sqrt{10}\,\right]$.

а) $\log_2 3$, $\log_2 5$; б) $\log_2 5$

28. (*МИОО, 2017*) Решите неравенство

$$\frac{35^{|x|} - 5^{|x|} - 5 \cdot 7^{|x|} + 5}{2^{\sqrt{x+2}} + 1} \geqslant 0.$$

$[-2; -1] \cup \{0\} \cup [1; +\infty)$

27. (*МИОО, 2017*) Решите неравенство

$$3^{|x|}-8-\frac{3^{|x|}+9}{9^{|x|}-4\cdot 3^{|x|}+3}\leqslant \frac{5}{3^{|x|}-1}\,.$$

$\boxed{[-2;-1)\cup[-\log_3 2;0)\cup(0;\log_3 2]\cup(1;2]}$

26. (*МИОО, 2017*) Решите неравенство

$$\frac{3^{2x}-54\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2(x+1)}-1}{x+3}\leqslant 0.$$

$\boxed{(-3;\frac{1}{2}]}$

25. (*МИОО, 2017*) Решите неравенство

$$\frac{15^x-3^{x+1}-5^{x+1}+15}{-x^2+2x}\geqslant 0.$$

$\boxed{(0;\log_5 3]\cup[\log_3 5;2)}$

24. (*ЕГЭ, 2016*) Решите неравенство

$$\frac{4^x-2^{x+4}+30}{2^x-2}+\frac{4^x-7\cdot 2^x+3}{2^x-7}\leqslant 2^{x+1}-14.$$

$\boxed{(-\infty;1)\cup[2;\log_2 7)}$

23. (*ЕГЭ, 2016*) Решите неравенство

$$\frac{9^x-3^{x+1}-19}{3^x-6}+\frac{9^{x+1}-3^{x+4}+2}{3^x-9}\leqslant 10\cdot 3^x+3.$$

$\boxed{(-\infty;1]\cup(\log_3 6;2)}$

22. (*ЕГЭ, 2016*) Решите неравенство

$$125^x-25^x+\frac{4\cdot 25^x-20}{5^x-5}\leqslant 4.$$

$\boxed{\{0\}\cup[\log_5 4;1)}$

21. (*ЕГЭ, 2016*) Решите неравенство

$$\frac{27^{x+\frac{1}{3}} - 10\cdot 9^x + 10\cdot 3^x - 5}{9^{x+\frac{1}{2}} - 10\cdot 3^x + 3} \leqslant 3^x + \frac{1}{3^x - 2} + \frac{1}{3^{x+1} - 1}\,.$$

$(-\infty;-1)\cup(-1;0]\cup(\log_3 2;1)$

20. (*ЕГЭ, 2016*) а) Решите уравнение

$$2^{4\cos x} + 3\cdot 2^{2\cos x} - 10 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \dfrac{5\pi}{2}\right]$.

а) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{3}$

19. (*ЕГЭ, 2016*) а) Решите уравнение

$$8^x - 7\cdot 4^x - 2^{x+4} + 112 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[\log_2 5; \log_2 11]$.

а) 2, $\log_2 7$; б) $\log_2 7$

18. (*МИОО, 2016*) Решите неравенство

$$2^{\frac{x}{x+1}} - 2^{\frac{5x+3}{x+1}} + 8 \leqslant 2^{\frac{2x}{x+1}}.$$

$(-\infty;-1)\cup[0;+\infty)$

17. (*МИОО, 2016*) Решите неравенство

$$\frac{2\cdot 3^{2x+1} - 6^x - 4^{x+1} - 9}{9^x - 3} \leqslant 3.$$

$\left(\frac{1}{2}; \log_{\frac{3}{2}}\frac{4}{3}\right]$

16. (*МИОО, 2016*) Решите неравенство

$$\frac{2^{2x+1} - 96\cdot 0{,}5^{2x+3} + 2}{x+1} \leqslant 0.$$

$\left(-1; \frac{1}{2}\right]$

15. (*ЕГЭ, 2015*) Решите неравенство

$$\frac{31 - 5 \cdot 2^x}{4^x - 24 \cdot 2^x + 128} \geqslant 0{,}25.$$

$\boxed{\{1\} \cup (3;4)}$

14. (*ЕГЭ, 2015*) Решите неравенство

$$\frac{2}{3^x - 9} \geqslant \frac{8}{3^x - 3}.$$

$\boxed{(-\infty;1) \cup (2;\log_3 11]}$

13. (*ЕГЭ, 2015*) Решите неравенство

$$\frac{105}{\left(2^{4-x^2} - 1\right)^2} - \frac{22}{2^{4-x^2} - 1} + 1 \geqslant 0.$$

$\boxed{(-\infty;-2) \cup (-2;-1] \cup \{0\} \cup [1;2) \cup (2;+\infty)}$

12. (*МИОО, 2015*) Решите неравенство

$$\frac{81^x + 2 \cdot 25^{x \log_5 3} - 5}{(4x-1)^2} \geqslant 0.$$

$\boxed{\left[\log_9\left(\sqrt{6}-1\right); \tfrac{1}{4}\right) \cup \left(\tfrac{1}{4}; +\infty\right)}$

11. (*ЕГЭ, 2014*) а) Решите уравнение:

$$3 \cdot 9^{x-\frac{1}{2}} - 7 \cdot 6^x + 3 \cdot 4^{x+1} = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2;3]$.

$\boxed{\text{а) } \log_{\frac{3}{2}} 3,\ \log_{\frac{3}{2}} 4;\quad \text{б) } \log_{\frac{3}{2}} 3}$

10. (*МИОО, 2013*) а) Решите уравнение:

$$7 \cdot 9^{x^2-3x+1} + 5 \cdot 6^{x^2-3x+1} - 48 \cdot 4^{x^2-3x} = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-1;2]$.

$\boxed{\text{а) } \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2};\quad \text{б) } \frac{3-\sqrt{5}}{2}}$

9. (*ЕГЭ, 2013*) а) Решите уравнение:

$$25^{x-\frac{3}{2}} - 12 \cdot 5^{x-2} + 7 = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(2; \dfrac{8}{3}\right)$.

$\boxed{\text{а) } 2,\ \log_5 35; \quad \text{б) } \log_5 35}$

8. (*ЕГЭ, 2013*) а) Решите уравнение:

$$9^{x+1} - 2 \cdot 3^{x+2} + 5 = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(\log_3 \frac{3}{2}; \sqrt{5}\right)$.

$\boxed{\text{а) } -1,\ \log_3 \tfrac{5}{3}; \quad \text{б) } \log_3 \tfrac{5}{3}}$

7. (*ЕГЭ, 2013*) Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 2^x + 17 \cdot 2^{3-x} \leqslant 25, \\ \dfrac{x^2 - 3x - 5}{x - 4} + \dfrac{3x^2 - 15x + 2}{x - 5} \leqslant 4x + 1. \end{cases}$$

$\boxed{\{3\} \cup (4; \log_2 17]}$

6. (*ЕГЭ, 2013*) Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 5 \cdot 2^{2x+2} - 21 \cdot 2^{x-1} + 1 \leqslant 0, \\ \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x} + \dfrac{3x + 1}{x - 1} \leqslant \dfrac{4x + 1}{x}. \end{cases}$$

$\boxed{\{-3\} \cup \left(-2; -\log_2 \tfrac{5}{2}\right]}$

5. (*ЕГЭ, 2013*) Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 4^x - 29 \cdot 2^x + 168 \leqslant 0, \\ \dfrac{x^4 - 5x^3 + 3x - 25}{x^2 - 5x} \geqslant x^2 - \dfrac{1}{x - 4} + \dfrac{5}{x}. \end{cases}$$

$\boxed{\{3\} \cup (4; \log_2 21]}$

4. (*МИОО, 2013*) Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} x^2 + \left(1 - \sqrt{10}\right) x - \sqrt{10} \leqslant 0, \\ \dfrac{3^{|x^2-2x-1|} - 9}{x} \geqslant 0. \end{cases}$$

$\boxed{[-1; 0) \cup \{1\} \cup \left[3; \sqrt{10}\right]}$

3. (*МИОО, 2012*) Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{5^{x+1} - 1} + \dfrac{5^{x+1} - 2}{5^{x+1} - 3} \geqslant 2, \\ \left(\dfrac{2}{25x^2 + 40x + 7} + \dfrac{25x^2 + 40x + 7}{2}\right)^2 \geqslant 4. \end{cases}$$

$\boxed{(-1; \log_5 0{,}4] \cup (\log_5 0{,}6; -0{,}2) \cup (-0{,}2; 0]}$

2. (*МИОО, 2012*) Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 2^x + 6 \cdot 2^{-x} \leqslant 7, \\ \dfrac{2x^2 - 6x}{x - 4} \leqslant x. \end{cases}$$

$\boxed{\{0\} \cup [2; \log_2 6]}$

1. (*МИОО, 2009*) Решите неравенство:

$$\left(3^{\frac{x-2}{2}} - 1\right) \sqrt{3^x - 10\sqrt{3^x} + 9} \geqslant 0.$$

$\boxed{\{0\} \cup [4; +\infty)}$