

Стереометрия на ЕГЭ по математике

Здесь приведены задачи по стереометрии, которые предлагались на ЕГЭ по математике (профильный уровень, сложная часть), а также на диагностических, контрольных и тренировочных работах МИОО начиная с 2009 года.

171. (ЕГЭ, 2024) Дана правильная четырёхугольная призма $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Плоскость α проходит через вершины B_1 и D и пересекает рёбра AA_1 и CC_1 в точках M и K соответственно. Известно, что точка M — середина ребра AA_1 .

- Докажите, что четырёхугольник MB_1KD — ромб.
- Найдите площадь ромба MB_1KD , если объём призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равен 12, а площадь её основания $ABCD$ равна 4.

171 (9)

170. (ЕГЭ, 2024) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC точки M и K — середины рёбер AB и SC соответственно, а точки N и L отмечены на рёбрах SA и BC соответственно так, что отрезки MK и NL пересекаются, а $AN = 3NS$.

- Докажите, что прямые MN , KL и SB пересекаются в одной точке.
- Найдите отношение $BL : LC$.

170 (9)

169. (ЕГЭ, 2024) В правильном тетраэдре $ABCD$ точки M и N — середины рёбер AB и CD соответственно. Плоскость α параллельна прямым AB и CD и пересекает прямую MN в точке K .

- Докажите, что плоскость α перпендикулярна прямой MN .
- Пусть плоскость α пересекает ребро AC в точке L . Найдите длину отрезка AL , если известно, что $MK = 1$, $KN = 2$.

169 (9)

168. (ЕГЭ, 2024) В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 5$ и $BC = 12$. Длины боковых рёбер пирамиды: $SA = 2\sqrt{14}$, $SB = 9$, $SD = 10\sqrt{2}$.

- Докажите, что SA — высота пирамиды $SABCD$.
- Найдите угол между прямыми SC и BD .

168 (9)

167. (ЕГЭ, 2024) В правильном тетраэдре $ABCD$ точки M и N — середины рёбер AB и CD соответственно. Плоскость α перпендикулярна прямой MN и пересекает ребро BC в точке K .

- а) Докажите, что прямая MN перпендикулярна рёбрам AB и CD .
- б) Найдите площадь сечения тетраэдра $ABCD$ плоскостью α , если известно, что $BK = KC = 2$.

9

166. (ЕГЭ, 2024) В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4$ и $BC = 3$. Длины боковых рёбер пирамиды: $SA = 12$, $SB = 4\sqrt{10}$, $SD = 3\sqrt{17}$.

- а) Докажите, что SA — высота пирамиды.
- б) Найдите длину ребра SC .

9

165. (ЕГЭ, 2023) В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит параллелограмм $ABCD$. На рёбрах $A_1 B_1$, $B_1 C_1$ и BC отмечены точки M , K и N соответственно, причём $B_1 K : KC_1 = 1 : 2$. Четырёхугольник $AMKN$ — равнобедренная трапеция с основаниями 2 и 3.

- а) Докажите, что точка N — середина ребра BC .
- б) Найдите площадь трапеции $AMKN$, если объём призмы равен 12, а высота призмы равна 2.

9

164. (ЕГЭ, 2023) В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ точка M является серединой ребра BB_1 , а точка N — середина ребра $A_1 C_1$. Плоскость α , параллельная прямым AM и $B_1 N$, проходит через середину отрезка MN .

- а) Докажите, что плоскость α проходит через середину отрезка $B_1 M$.
- б) Найдите площадь сечения призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ плоскостью α , если все рёбра призмы имеют длину 4.

9

163. (ЕГЭ, 2023) Грани ABD и ACD тетраэдра $ABCD$ являются правильными треугольниками со стороной 4 и перпендикулярны друг другу. Плоскость α перпендикулярна ребру CD и пересекает рёбра AB и CD в точках K и M соответственно, причём $CM : MD = 5 : 3$.

- а) Докажите, что K — середина ребра AB .
- б) Найдите площадь сечения тетраэдра плоскостью α .

$\frac{7}{61}$ (9)

162. (ЕГЭ, 2023) На рёбрах AC , AD , BD и BC тетраэдра $ABCD$ отмечены точки K , L , M и N соответственно, причём $AK : KC = 3 : 7$. Четырёхугольник $KLMN$ — квадрат со стороной 3.

- а) Докажите, что $BM : MD = 3 : 7$.
- б) Найдите расстояние от вершины C до плоскости KLM , если объём тетраэдра $ABCD$ равен 50.

$\frac{64}{9}$ (9)

161. (ЕГЭ, 2023) В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 5$ и $BC = 3$. Точка M делит ребро $A_1 D_1$ в отношении $A_1 M : MD_1 = 2 : 3$, а точка K — середина ребра DD_1 .

- а) Докажите, что плоскость MKC параллельна прямой BD .
- б) Найдите тангенс угла между плоскостью MKC и плоскостью основания призмы, если $\angle MKC = 90^\circ$, $\angle ADC = 60^\circ$.

$\frac{8}{61\sqrt{3}}$ (9)

160. (ЕГЭ, 2023) В основании прямой призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AB . Точка P делит ребро AB в отношении $AP : PB = 1 : 3$, а точка Q — середина ребра $A_1 C_1$. Через середину M ребра BC провели плоскость α , перпендикулярную отрезку PQ .

- а) Докажите, что плоскость α делит ребро AC пополам.
- б) Найдите отношение, в котором плоскость α делит ребро $A_1 C_1$, считая от точки A_1 , если известно, что $AB = AA_1$, $AB : BC = 2 : 5$.

$\frac{9}{11}$ (9)

159. (ЕГЭ, 2023) В четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ длины всех боковых рёбер равны длине ребра AD , а длина каждого из рёбер AB , BC и CD ровно в два раза меньше, чем длина ребра AD .

- а) Докажите, что высота пирамиды проходит через середину ребра AD .
- б) Найдите, в каком отношении плоскость BMN делит высоту пирамиды, считая от вершины S , если точка M — середина ребра SD , а точка N делит ребро SC в отношении $SN : NC = 3 : 1$

$\boxed{7 : 8 (9)}$

158. (ЕГЭ, 2022) Точка D выбрана вне плоскости правильного треугольника ABC так, что $\cos \angle DAB = \cos \angle DAC = 0,3$.

- а) Докажите, что прямые AD и BC перпендикулярны.
- б) Найдите расстояние между прямыми AD и BC , если $AB = 6$.

$\boxed{\frac{9}{99\sqrt{8}} (9)}$

157. (ЕГЭ, 2022) Точка M — середина ребра SA правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$. Точка N лежит на ребре SB , $SN : NB = 1 : 2$.

- а) Докажите, что плоскость CMN параллельна прямой SD .
- б) Найдите площадь сечения пирамиды $SABCD$ плоскостью CMN , если все рёбра пирамиды равны 6.

$\boxed{\frac{7}{61\sqrt{51}} (9)}$

156. (ЕГЭ, 2022) В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки M и N — середины рёбер AB и AD соответственно.

- а) Докажите, что прямые $B_1 N$ и CM перпендикулярны.
- б) Плоскость α проходит через точки N и B_1 параллельно прямой CM . Найдите расстояние от точки C до плоскости α , если $B_1 N = 6$.

$\boxed{\frac{5}{4\sqrt{5}} (9)}$

155. (ЕГЭ, 2022) В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ на диагонали BD_1 отмечена точка N так, что $BN : ND_1 = 1 : 2$. Точка O — середина отрезка CB_1 .

- а) Докажите, что прямая NO проходит через точку A .
- б) Найдите объём параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, если длина отрезка NO равна расстоянию между прямыми BD_1 и CB_1 и равна $\sqrt{2}$.

$\boxed{8\sqrt{3} (9)}$

154. (ЕГЭ, 2022) Диагонали грани $CDD_1 C_1$ куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ пересекаются в точке O . Плоскость $DA_1 C_1$ пересекает диагональ BD_1 в точке F .

- а) Докажите, что $BF : FD_1 = A_1 F : FO$.
- б) Точки M и N — середины рёбер AB и AA_1 соответственно. Найдите угол между прямой MN и плоскостью $DA_1 C_1$.

$\boxed{2\sqrt{3} \arctg \sqrt{2} (9)}$

153. (ЕГЭ, 2022) Точка M — середина ребра AA_1 треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, в основании которой лежит треугольник ABC . Плоскость α проходит через точки B и B_1 перпендикулярно прямой C_1M .

- а) Докажите, что одна из диагоналей грани ACC_1A_1 равна одному из рёбер этой грани.
 б) Найдите расстояние от точки C до плоскости α , если плоскость α делит ребро AC в отношении $1 : 5$, считая от вершины A , $AC = 20$, $AA_1 = 32$.

01 (9)

152. (ЕГЭ, 2021) В основании правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник ABC . На прямой AA_1 отмечена точка D так, что точка A_1 — середина отрезка AD . На прямой B_1C_1 отмечена точка E так, что точка C_1 — середина отрезка B_1E .

- а) Докажите, что прямые A_1B_1 и DE перпендикулярны.
 б) Найдите расстояние между прямыми AB и DE , если $AB = 3$, $AA_1 = 1$.

$\frac{1}{12} \wedge 8$ (9)

151. (ЕГЭ, 2021) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $AD = 10$, высота $SH = 12$. Точка K — середина бокового ребра SD . Плоскость AKB пересекает боковое ребро SC в точке P .

- а) Докажите, что площадь четырёхугольника $CDKP$ составляет $3/4$ площади треугольника SCD .
 б) Найдите объём пирамиды $ACDKP$.

091 (9)

150. (ЕГЭ, 2021) Точка E лежит на высоте SO , а точка F — на боковом ребре SC правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$, причём $SE : EO = SF : FC = 2 : 1$.

- а) Докажите, что плоскость BEF пересекает ребро SD в его середине.
 б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью BEF , если $AB = 8$, $SO = 14$

$\frac{5}{2} \wedge 88$ (9)

149. (ЕГЭ, 2021) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания $AB = 16$, высота $SH = 10$. Точка K — середина бокового ребра SA . Плоскость, параллельная плоскости ABC , проходит через точку K и пересекает рёбра SB и SC в точках Q и P соответственно.

- а) Докажите, что площадь четырёхугольника $BCPQ$ составляет $3/4$ площади треугольника SBC .
 б) Найдите объём пирамиды $KBCPQ$.

$\varepsilon \wedge 08$ (9)

148. (ЕГЭ, 2021) В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . Основание высоты SO этой пирамиды является серединой ребра AB .

- а) Докажите, что $SA = SC$.
- б) Найдите угол между плоскостями SAC и ABC , если $AC = 24$, $AB = 30$, $SA = 17$.

$\frac{6}{8}$ балла (9)

147. (ЕГЭ, 2020) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 4, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах CD и SC отмечены точки N и K соответственно, причём $DN : NC = SK : KC = 1 : 3$. Плоскость α содержит прямую KN и параллельна прямой BC .

- а) Докажите, что плоскость α параллельна прямой SA .
- б) Найдите угол между плоскостями α и SBC .

$\frac{15}{2 \arcsin \frac{15}{7}}$ (9)

146. (ЕГЭ, 2020) В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона основания AB равна 7, а боковое ребро SA равно 10. На рёбрах BC и SC отмечены точки M и K соответственно, причём $BM = 4$, $SK = 7$.

- а) Докажите, что плоскость MKD перпендикулярна плоскости ABC .
- б) Найдите объём пирамиды $CDKM$.

$\frac{40}{63 \sqrt{17}}$ (9)

145. (ЕГЭ, 2020) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 8, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах AB и SB отмечены точки M и K соответственно, причём $AM = 2$, $SK = 1$.

- а) Докажите, что плоскость CKM перпендикулярна плоскости ABC .
- б) Найдите объём пирамиды $BCKM$.

$\frac{7}{48 \sqrt{17}}$ (9)

144. (ЕГЭ, 2020) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 9, а боковое ребро SA равно $\sqrt{43}$. На рёбрах AB и SB отмечены точки M и K соответственно, причём $AM = 8$, $SK : KB = 7 : 3$. Плоскость α перпендикулярна плоскости ABC и содержит точки M и K .

- а) Докажите, что плоскость α содержит точку C .
- б) Найдите площадь сечения пирамиды $SABC$ плоскостью α .

$\frac{9}{87 \sqrt{43}}$ (9)

143. (ЕГЭ, 2020) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC боковое ребро $SA = 8$. Точки M и N — середины рёбер AB и SC соответственно, $MN = 5$.

- а) Докажите, что проекции отрезков SA и MN на плоскость ABC равны.
- б) Найдите объём пирамиды $SABC$.

6Э^9 (9)

142. (ЕГЭ, 2020) В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ боковое ребро $SA = 14$, а сторона $AB = 8$. Точка M — середина стороны AB . Плоскость α проходит через точки M и D и перпендикулярна плоскости ABC . Прямая SC пересекает плоскость α в точке K .

- а) Докажите, что $MK = KD$.
- б) Найдите объём пирамиды $MCDK$.

11^9Э (9)

141. (ЕГЭ, 2020) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания $AB = 8$, а боковое ребро $AA_1 = 7$. На ребре CC_1 отмечена точка M причём $CM = 1$.

- а) Точки O и O_1 — центры окружностей, описанных около треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно. Докажите, что прямая OO_1 содержит точку пересечения медиан треугольника ABM .
- б) Найдите расстояние от точки A_1 до плоскости ABM .

Э^4Э (9)

140. (ЕГЭ, 2019) В пирамиде $SABC$ известны длины рёбер: $SC = SB = AC = AB = \sqrt{31}$, $BC = SA = 2\sqrt{7}$.

- а) Докажите, что прямая SA перпендикулярна прямой BC .
- б) Найдите расстояние между прямыми BC и SA .

11^9 (9)

139. (ЕГЭ, 2019) Радиус основания конуса с вершиной S и центром основания O равен 5, а его высота равна $\sqrt{51}$. Точка M — середина образующей SA конуса, а его точки N и B лежат на основании конуса, причём прямая MN параллельна образующей конуса SB .

- а) Докажите, что угол ANO — прямой.
- б) Найдите угол между прямой BM и плоскостью основания конуса, если $AB = 8$.

оЭ (9)

138. (ЕГЭ, 2019) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно 5. На рёбрах AB и SC отмечены точки K и M соответственно, причём $AK : KB = SM : MC = 5 : 1$. Плоскость α содержит прямую KM и параллельна прямой SA .

- а) Докажите, что сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α — прямоугольник.
- б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка A , а основанием — сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α .

$$\frac{9\sqrt{3}}{6\sqrt{13}} \quad (9)$$

137. (ЕГЭ, 2019) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах AB и SC отмечены точки K и M соответственно, причём $AK : KB = SM : MC = 1 : 5$. Плоскость α содержит прямую KM и параллельна прямой BC .

- а) Докажите, что плоскость α параллельна прямой SA .
- б) Найдите угол между плоскостями α и SBC .

$$\frac{0\sqrt{11}}{1\sqrt{3}} \text{ cos } \alpha \quad (9)$$

136. (ЕГЭ, 2019) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 5, а боковое ребро SA равно 3. На рёбрах AB и SC отмечены точки K и M соответственно, причём $AK : KB = SM : MC = 1 : 4$. Плоскость α содержит прямую KM и параллельна прямой SA .

- а) Докажите, что плоскость α делит ребро AC в отношении $1 : 4$, считая от вершины A .
- б) Найдите расстояние между прямыми SA и KM .

$$\frac{9}{2\sqrt{5}} \quad (9)$$

135. (ЕГЭ, 2019) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 8, а боковое ребро SA равно 10. На рёбрах CD и SC отмечены точки N и K соответственно, причём $DN : NC = SK : KC = 1 : 7$. Плоскость α содержит прямую KN и параллельна прямой BC .

- а) Докажите, что плоскость α делит ребро SB в отношении $1 : 7$, считая от вершины S .
- б) Найдите расстояние между прямыми SA и KN .

$$\frac{12}{2\sqrt{5}} \quad (9)$$

134. (ЕГЭ, 2019) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 2, а боковое ребро равно 6. Точка M — середина ребра A_1C_1 , а точка O — точка пересечения диагоналей боковой грани ABB_1A_1 .

- а) Докажите, что точка пересечения диагоналей четырёхугольника, являющегося сечением призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью AMB , лежит на отрезке OC_1 .
- б) Найдите угол между прямой OC_1 и плоскостью AMB .

$\frac{11}{13}$ score (9)

133. (ЕГЭ, 2018) На продолжениях рёбер A_1A и D_1C_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ отмечены точки K и L соответственно, причём $AA_1 = AK$, $C_1D_1 = C_1L$.

- а) Докажите, что прямая KL проходит через середину ребра BC .
- б) Найдите угол между прямыми AD_1 и KL , если $AB = 2\sqrt{2}$, $AD = 6$, $AA_1 = 8$.

$\frac{11}{14}$ score (9)

132. (ЕГЭ, 2018) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 4. Точка M — середина ребра AA_1 .

- а) Докажите, что прямые MB и B_1C перпендикулярны.
- б) Найдите расстояние между прямыми MB и B_1C .

$\frac{5}{2\sqrt{3}}$ (9)

131. (ЕГЭ, 2018) В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A и B , а на окружности другого основания — точки B_1 и C_1 , причём BB_1 — образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра.

- а) Докажите, что угол ABC_1 прямой.
- б) Найдите угол между прямыми BB_1 и AC_1 , если $AB = 10$, $BB_1 = 7$, $B_1C_1 = 24$.

$\frac{1}{26}$ score (9)

130. (ЕГЭ, 2018) В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A и B , а на окружности другого основания — точки B_1 и C_1 , причём BB_1 — образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра.

- а) Докажите, что угол ABC_1 прямой.
- б) Найдите расстояние от точки B до прямой AC_1 , если $AB = 21$, $BB_1 = 12$, $B_1C_1 = 16$.

$\frac{67}{120}$ (9)

129. (ЕГЭ, 2018) В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A , B и C , а на окружности другого основания — точка C_1 , причём CC_1 — образующая цилиндра, а AC — диаметр основания. Известно, что $\angle ACB = 30^\circ$, $AB = 2\sqrt{3}$, $CC_1 = 4\sqrt{6}$.

- а) Докажите, что угол между прямыми AC_1 и BC равен 60° .
- б) Найдите расстояние от точки B до прямой AC_1 .

□ 11^ (9)

128. (ЕГЭ, 2018) В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A , B и C , а на окружности другого основания — точка C_1 , причём CC_1 — образующая цилиндра, а AC — диаметр основания. Известно, что $\angle ACB = 45^\circ$, $AB = 2\sqrt{2}$, $CC_1 = 4$.

- а) Докажите, что угол между прямыми AC_1 и BC равен 60° .
- б) Найдите объём цилиндра.

□ 191 (9)

127. (ЕГЭ, 2018) В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A и B , а на окружности другого основания — точки B_1 и C_1 , причём BB_1 — образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра.

- а) Докажите, что угол ABC_1 прямой.
- б) Найдите объём цилиндра, если $AB = 7$, $BB_1 = 24$, $B_1C_1 = 10$.

□ 168 (9)

126. (ЕГЭ, 2018) На ребре AB правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ отмечена точка Q , причём $AQ : QB = 1 : 2$. Точка P — середина ребра AS .

- а) Докажите, что плоскость DPQ перпендикулярна плоскости основания пирамиды.
- б) Найдите площадь сечения DPQ , если площадь сечения DSB равна 6.

□ 9^ (9)

125. (ЕГЭ, 2018) На ребре AB правильной треугольной пирамиды $SABC$ с основанием ABC отмечена точка K , причём $AK = 15$, $BK = 3$. Через точку K проведена плоскость α , параллельная плоскости SBC .

- а) Докажите, что плоскость α проходит через середину высоты пирамиды.
- б) Найдите расстояние между плоскостями α и SBC , если высота пирамиды равна 13.

□ 87/68 (9)

124. (ЕГЭ, 2017) Длина диагонали куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равна $3\sqrt{11}$. На луче $A_1 C$ отмечена точка P так, что $A_1 P = 4\sqrt{11}$.

- Докажите, что $PBDC_1$ — правильный тетраэдр.
- Найдите длину отрезка AP .

11 (9)

123. (ЕГЭ, 2017) На рёбрах AB и BC треугольной пирамиды $ABCD$ отмечены точки M и N соответственно, причём $AM : MB = CN : NB = 1 : 3$. Точки P и Q — середины рёбер DA и DC соответственно.

- Докажите, что точки P, Q, M и N лежат в одной плоскости.
- Найдите отношение объёмов многогранников, на которые плоскость PQM разбивает пирамиду.

87 : 6 (9)

122. (ЕГЭ, 2017) На ребре SD правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ отмечена точка M , причём $SM : MD = 1 : 4$. Точки P и Q — середины рёбер BC и AD соответственно.

- Докажите, что сечение пирамиды плоскостью MPQ является равнобедренной трапецией.
- Найдите отношение объёмов многогранников, на которые плоскость MPQ разбивает пирамиду.

11 : 11 (9)

121. (ЕГЭ, 2017) Основанием четырёхугольной пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$, причём $AB = 2\sqrt{3}$, $BC = 2\sqrt{6}$. Основанием высоты пирамиды является центр прямоугольника. Из вершин A и C опущены перпендикуляры AP и CQ на ребро SB .

- Докажите, что P — середина отрезка BQ .
- Найдите угол между гранями SBA и SBC , если $SD = 6$.

$\left(\frac{95}{99}\sqrt{\frac{95}{99}} - \right)$ coscra (9)

120. (ЕГЭ, 2017) Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C , а боковая грань $ACC_1 A_1$ является квадратом.

- Докажите, что прямые CA_1 и AB_1 перпендикулярны.
- Найдите расстояние между прямыми CA_1 и AB_1 , если $AC = 1$, $BC = 4$.

$\frac{8}{7}$ (9)

119. (ЕГЭ, 2017) Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . Диагонали боковых граней $AA_1 B_1 B$ и $BB_1 C_1 C$ равны 15 и 9 соответственно, $AB = 13$.

- Докажите, что треугольник $BA_1 C_1$ прямоугольный.
- Найдите объём пирамиды $AA_1 C_1 B$.

$\sqrt{1} \wedge 07$ (9)

118. (ЕГЭ, 2017) В треугольной пирамиде $PABC$ с основанием ABC известно, что $AB = 13$, $PB = 15$, $\cos \angle PBA = \frac{48}{65}$. Основанием высоты этой пирамиды является точка C . Прямые PA и BC перпендикулярны.

- Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
- Найдите объём пирамиды $PABC$.

06 (9)

117. (ЕГЭ, 2017) Основанием прямой четырёхугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является ромб $ABCD$, $AB = AA_1$.

- Докажите, что прямые A_1C и BD перпендикулярны.
- Найдите объём призмы, если $A_1C = BD = 2$.

$\frac{8}{9\sqrt{4}}$ (9)

116. (ЕГЭ, 2017) Сечением прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью α , содержащей прямую BD_1 и параллельной прямой AC , является ромб.

- Докажите, что грань $ABCD$ — квадрат.
- Найдите угол между плоскостями α и BCC_1 , если $AA_1 = 6$, $AB = 4$.

$\frac{3}{\sqrt{13}}$ (9)

115. (Санкт-Петербург, пробный ЕГЭ, 2017) В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка M — середина ребра $C_1 D_1$, а точка K делит ребро AA_1 в отношении $AK : KA_1 = 1 : 3$. Через точки K и M проведена плоскость α , параллельная прямой BD и пересекающая диагональ A_1C в точке O .

- Докажите, что плоскость α делит диагональ A_1C в отношении $A_1O : OC = 3 : 5$.
- Найдите угол между плоскостью α и плоскостью ABC , если $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб.

$\frac{2}{\sqrt{13}}$ (9)

114. (МИОО, 2017) В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со стороной $AB = 4$ и диагональю $BD = 7$. Все боковые рёбра пирамиды равны 4. На диагонали BD основания $ABCD$ отмечена точка E , а на ребре AS — точка F так, что $SF = BE = 3$.

- Докажите, что плоскость CEF параллельна ребру SB .
- Плоскость CEF пересекает ребро SD в точке Q . Найдите расстояние от точки Q до плоскости ABC .

$\frac{4}{\sqrt{13}}$ (9)

113. (МИОО, 2017) В одном основании прямого кругового цилиндра с высотой 3 и радиусом основания 8 проведена хорда AB , равная радиусу основания, а в другом его основании проведён диаметр CD , перпендикулярный AB . Построено сечение $ABNM$, проходящее через прямую AB перпендикулярно прямой CD так, что точка C и центр основания цилиндра, в котором проведён диаметр CD , лежат с одной стороны от сечения.

- Докажите, что диагонали этого сечения равны между собой.
- Найдите объём пирамиды $SABNM$.

$\frac{3}{2} \sqrt{64 + 32\sqrt{3}}$ (9)

112. (МИОО, 2017) Отрезок AB — диаметр верхнего основания цилиндра, CD — диаметр нижнего, причём отрезки AB и CD не лежат на параллельных прямых.

- а) Докажите, что у тетраэдра $ABCD$ скрещивающиеся рёбра попарно равны.
- б) Найдите объём этого тетраэдра, если $AC = 6$, $AD = 8$, а радиус цилиндра равен 3.

$\frac{8}{79}$ (9)

111. (МИОО, 2017) Точки P и Q — середины рёбер AD и CC_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ соответственно.

- а) Докажите, что прямые $B_1 P$ и $Q B$ перпендикулярны.
- б) Найдите площадь сечения куба плоскостью, проходящей через точку P и перпендикулярной прямой BQ , если ребро куба равно 2.

$\frac{9}{2}$ (9)

110. (МИОО, 2017) Дана правильная треугольная призма $ABCA_1 B_1 C_1$, у которой сторона основания равна 2, а боковое ребро равно 3. Через точки A , C_1 и середину T ребра $A_1 B_1$ проведена плоскость.

- а) Докажите, что сечение призмы указанной плоскостью является прямоугольным треугольником.
- б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью ABC .

$\frac{3}{4}\sqrt{3}$ (9)

109. (МИОО, 2017) В основании правильной треугольной пирамиды $ABCD$ лежит треугольник ABC со стороной, равной 6. Боковое ребро пирамиды равно 5. На ребре AD отмечена точка T так, что $AT : TD = 2 : 1$. Через точку T параллельно прямым AC и BD проведена плоскость.

- а) Докажите, что сечение пирамиды указанной плоскостью является прямоугольником.
- б) Найдите площадь сечения.

$\frac{8}{20}$ (9)

108. (МИОО, 2017) На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E : EA = 2 : 5$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1 F : FB = 1 : 6$, а точка T — середина ребра $B_1 C_1$. Известно, что $AB = 5$, $AD = 6$, $AA_1 = 14$.

- а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1 .
- б) Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью $AA_1 B_1$.

$\frac{101}{62}\sqrt{3}$ (9)

107. (МИОО, 2017) В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ лежит равнобедренный ($AB = BC$) треугольник ABC . Точки K и M — середины рёбер $A_1 B_1$ и AC соответственно.

- а) Докажите, что $KM = KB$.
- б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1 , если $AB = 8$, $AC = 6$ и $AA_1 = 3$.

$\frac{9\sqrt{8}}{11}\sqrt{3}$ (9)

106. (ЕГЭ, 2016) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона AB основания равна 12, а высота призмы равна 2. На рёбрах B_1C_1 и AB отмечены точки P и Q соответственно, причём $PC_1 = 3$, а $AQ = 4$. Плоскость A_1PQ пересекает ребро BC в точке M .

- Докажите, что точка M является серединой ребра BC .
- Найдите расстояние от точки B до плоскости A_1PQ .

$$\frac{9}{0\bar{3}\wedge^{\bar{3}}\bar{3}} \quad (9)$$

105. (ЕГЭ, 2016) На рёбрах CD и BB_1 куба $ABCD A_1B_1C_1D_1$ с ребром 12 отмечены точки P и Q соответственно, причём $DP = 4$, а $B_1Q = 3$. Плоскость APQ пересекает ребро CC_1 в точке M .

- Докажите, что точка M является серединой ребра CC_1 .
- Найдите расстояние от точки C до плоскости APQ .

$$\frac{31}{9\bar{2}\wedge^{\bar{2}}\bar{1}} \quad (9)$$

104. (ЕГЭ, 2016) В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C , $AC = 4$, $BC = 16$, $AA_1 = 4\sqrt{2}$. Точка Q — середина ребра A_1B_1 , а точка P делит ребро B_1C_1 в отношении $1 : 2$, считая от вершины C_1 . Плоскость APQ пересекает ребро CC_1 в точке M .

- Докажите, что точка M является серединой ребра CC_1 .
- Найдите расстояние от точки A_1 до плоскости APQ .

$$\frac{16\wedge}{3\bar{2}} \quad (9)$$

103. (ЕГЭ, 2016) В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB = 4$, $BC = 3$, $AA_1 = 2$. Точки P и Q — середины рёбер A_1B_1 и CC_1 соответственно. Плоскость APQ пересекает ребро B_1C_1 в точке U .

- Докажите, что $B_1U : UC_1 = 2 : 1$.
- Найдите площадь сечения параллелепипеда $ABCD A_1B_1C_1D_1$ плоскостью APQ .

$$\frac{2}{3\wedge^{\bar{1}}\bar{1}} \quad (9)$$

102. (ЕГЭ, 2016) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона AB основания равна $2\sqrt{3}$, а высота SH пирамиды равна 3. Точки M и N — середины рёбер CD и AB соответственно, а NT — высота пирамиды с вершиной N и основанием SCD .

- Докажите, что точка T является серединой отрезка SM .
- Найдите расстояние между прямыми NT и SC .

$$\frac{3}{1\bar{1}\wedge} \quad (9)$$

101. (ЕГЭ, 2016) В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1B_1C_1D_1$ сторона AB основания равна 8, а боковое ребро AA_1 равно $4\sqrt{2}$. На рёбрах BC и C_1D_1 отмечены точки K и L соответственно, причём $BK = C_1L = 2$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L .

- Докажите, что прямая A_1C перпендикулярна плоскости γ .
- Найдите расстояние от точки B до плоскости γ .

$$\frac{3}{0\bar{2}\wedge^{\bar{1}}\bar{0}} \quad (9)$$

100. (ЕГЭ, 2016) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона AB основания равна 12, а боковое ребро AA_1 равно $3\sqrt{6}$. На рёбрах AB и B_1C_1 отмечены точки K и L соответственно, причём $AK = 2$, $B_1L = 4$. Точка M — середина ребра A_1C_1 . Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L .

- Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ .
- Найдите расстояние от точки C до плоскости γ .

9

99. (ЕГЭ, 2016) В треугольной пирамиде $ABCD$ двугранные углы при ребрах AD и BC равны, $AB = BD = DC = AC = 5$.

- Докажите, что $AD = BC$.
- Найдите объём пирамиды, если двугранные углы равны при рёбрах AD и BC равны 60° .

9

98. (ЕГЭ, 2016) В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $4\sqrt{3}$. На рёбрах AB , A_1D_1 и C_1D_1 отмечены точки M , N и K соответственно, причём $AM = A_1N = C_1K = 1$.

- Пусть L — точка пересечения плоскости MNK с ребром BC . Докажите, что $MNKL$ — квадрат.
- Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK .

9

97. (МИОО, 2016) Дан прямой круговой конус с вершиной M . Осевое сечение конуса — треугольник с углом 120° при вершине M . Образующая конуса равна $2\sqrt{3}$. Через точку M проведено сечение конуса, перпендикулярное одной из образующих.

- Докажите, что получившийся в сечении треугольник тупоугольный.
- Найдите площадь сечения.

9

96. (МИОО, 2016) В одном основании прямого кругового цилиндра с высотой 12 и радиусом основания 6 проведена хорда AB , равная радиусу основания, а в другом его основании проведён диаметр CD , перпендикулярный AB . Построено сечение $ABNM$, проходящее через прямую AB перпендикулярно прямой CD так, что точка S и центр основания цилиндра, в котором проведён диаметр CD , лежат с одной стороны от сечения.

- Докажите, что диагонали этого сечения равны между собой.
- Найдите объём пирамиды $SABNM$.

9

95. (МИОО, 2016) Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 4. Через точки A , C_1 и середину T ребра A_1B_1 проведена плоскость.

- Докажите, что сечение призмы указанной плоскостью является прямоугольным треугольником.
- Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью ABC .

9

94. (МИОО, 2016) В основании правильной треугольной пирамиды $ABCD$ лежит треугольник ABC со стороной, равной 6. Боковое ребро пирамиды равно 4. Через такую точку T ребра AD , что $AT : TD = 3 : 1$, параллельно прямым AC и BD проведена плоскость.

- а) Докажите, что сечение пирамиды указанной плоскостью является прямоугольником.
- б) Найдите площадь сечения.

94 (9)

93. (МИОО, 2016) Все рёбра правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S равны 6. Основание O высоты SO этой пирамиды является серединой отрезка SS_1 , M — середина ребра AS , точка L лежит на ребре BC так, что $BL : LC = 1 : 2$.

- а) Докажите, что сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью S_1LM — равнобокая трапеция.
- б) Вычислите длину средней линии этой трапеции.

93 (9)

92. (МИОО, 2015) Все рёбра правильной треугольной пирамиды $SBCD$ с вершиной S равны 9. Основание O высоты SO этой пирамиды является серединой отрезка SS_1 , M — середина ребра SB , точка L лежит на ребре CD так, что $CL : LD = 7 : 2$.

- а) Докажите, что сечение пирамиды $SBCD$ плоскостью S_1LM — равнобокая трапеция.
- б) Вычислите длину средней линии этой трапеции.

92 (9)

91. (ЕГЭ, 2015) В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = \sqrt{5}$ и $BC = 2$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = \sqrt{7}$, $SB = 2\sqrt{3}$, $SD = \sqrt{11}$.

- а) Докажите, что SA — высота пирамиды.
- б) Найдите угол между прямой SC и плоскостью ASB .

91 (9)

90. (ЕГЭ, 2015) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ все рёбра равны 5. На рёбрах SA , AB , BC взяты точки P , Q , R соответственно так, что $PA = AQ = RC = 2$.

- а) Докажите, что плоскость PQR перпендикулярна ребру SD .
- б) Найдите расстояние от вершины D до плоскости PQR .

90 (9)

89. (ЕГЭ, 2015) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 24, а боковое ребро SA равно 19. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении $5 : 1$, считая от точки C .

б) Найдите площадь многоугольника, который является сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α .

89 (9)

88. (ЕГЭ, 2015) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 30, а боковое ребро SA равно 28. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5 : 1, считая от точки C .

б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости α .

$\frac{7}{8\sqrt{3}}$ (9)

87. (ЕГЭ, 2015) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 30, а боковое ребро SA равно 28. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5 : 1, считая от точки C .

б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка C , а основанием — сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α .

$\frac{8\sqrt{275}}{0}$ (9)

86. (ЕГЭ, 2015) Основанием прямой четырёхугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является квадрат $ABCD$ со стороной $5\sqrt{2}$, высота призмы равна $2\sqrt{14}$. Точка K — середина ребра BB_1 . Через точки K и C_1 проведена плоскость α , параллельная прямой BD_1 .

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью α является равнобедренным треугольником.

б) Найдите периметр треугольника, являющегося сечением призмы плоскостью α .

97 (9)

85. (ЕГЭ, 2015) В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все рёбра равны 5. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 3$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α , параллельная прямой BD_1 .

а) Докажите, что $A_1P : PB_1 = 1 : 2$, где P — точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1 .

б) Найдите объём большей из двух частей куба, на которые он делится плоскостью α .

$\frac{6}{1201}$ (9)

84. (МИОО, 2015) На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1E : EA = 5 : 3$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1F : FB = 5 : 11$, а точка T — середина ребра B_1C_1 . Известно, что $AB = 6\sqrt{2}$, $AD = 10$, $AA_1 = 16$.

а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1 .

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью EFT .

9'26 (9)

83. (МИОО, 2015) На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1E : EA = 3 : 4$. Точка T — середина ребра B_1C_1 . Известно, что $AB = 9$, $AD = 6$, $AA_1 = 14$.

а) В каком отношении плоскость ETD_1 делит ребро BB_1 ?

б) Найдите угол между плоскостью ETD_1 и плоскостью AA_1B_1 .

$\frac{8}{01\sqrt{}}$ 9 : 11 : 8 (9)

82. (МИОО, 2015) На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E = 6EA$. Точка T — середина ребра $B_1 C_1$. Известно, что $AB = 4\sqrt{2}$, $AD = 12$, $AA_1 = 14$.

- а) Докажите, что плоскость ETD_1 делит ребро BB_1 в отношении $4 : 3$.
 б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью ETD_1 .

06 (9)

81. (МИОО, 2015) В основании правильной треугольной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ лежит треугольник со стороной 6. Высота призмы равна 4. Точка N — середина ребра $A_1 C_1$.

- а) Постройте сечение призмы плоскостью BAN .
 б) Найдите периметр этого сечения.

61 (9)

80. (ЕГЭ, 2014) В правильной треугольной пирамиде $MABC$ стороны основания ABC равны 6, а боковые рёбра равны 8. На ребре AC находится точка D , на ребре AB находится точка E , а на ребре AM — точка L . Известно, что $CD = BE = LM = 2$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки E , D и L .

2^{√3}

79. (ЕГЭ, 2014) В треугольной пирамиде $MABC$ основанием является правильный треугольник ABC , ребро MB перпендикулярно плоскости основания, стороны основания равны 3, а ребро MA равно 6. На ребре AC находится точка D , на ребре AB находится точка E , а на ребре AM — точка L . Известно, что $AD = AL = 2$ и $BE = 1$. Найдите угол между плоскостью основания и плоскостью, проходящей через точки E , D и L .

arctg 2

78. (ЕГЭ, 2014) В треугольной пирамиде $MABC$ основанием является правильный треугольник ABC , ребро MA перпендикулярно плоскости основания, стороны основания равны 3, а ребро MB равно 5. На ребре AC находится точка D , на ребре AB находится точка E , а на ребре AM — точка L . Известно, что $AD = 2$ и $BE = ML = 1$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки E , D и L .

2^{√3}

77. (ЕГЭ, 2014) Высота цилиндра равна 3. Равнобедренный треугольник ABC с боковой стороной 10 углом $\angle A = 120^\circ$ расположен так, что его вершина A лежит на окружности нижнего основания цилиндра, а вершины B и C — на окружности верхнего основания. Найдите угол между плоскостью ABC и плоскостью основания цилиндра.

arcsin $\frac{3}{5}$

76. (ЕГЭ, 2014) В правильной треугольной пирамиде $MABC$ с вершиной M сторона основания AB равна 6. На ребре AB отмечена точка K так, что $AK : KB = 5 : 1$. Сечение MKC является равнобедренным треугольником с основанием MK . Найдите угол между боковыми гранями пирамиды.

2 arcsin $\sqrt{\frac{44}{682}}$

75. (ЕГЭ, 2014) Косинус угла между боковой гранью и основанием правильной треугольной пирамиды равен $\sqrt{3}/4$. Найдите угол между боковыми гранями этой пирамиды.

$\frac{2\pi}{3}$ ссылка

74. (ЕГЭ, 2014) Радиус основания конуса с вершиной P равен 6, а длина его образующей равна 9. На окружности основания конуса выбраны точки A и B , делящие окружность на две дуги, длины которых относятся как 1 : 3. Найдите площадь сечения конуса плоскостью ABP .

$\frac{1}{2}\sqrt{6}$

73. (МИОО, 2014) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC боковое ребро равно 5, а сторона основания равна 6. Найдите расстояние от вершины A до плоскости SBC .

$\frac{1}{6\sqrt{3}}$

72. (Санкт-Петербург, пробный ЕГЭ, 2014) Отрезок AC — диаметр основания конуса, отрезок AP — образующая этого конуса и $AP = AC$. Хорда основания BC составляет с прямой AC угол 60° . Через AP проведено сечение конуса плоскостью, параллельной прямой BC . Найдите расстояние от центра основания конуса O до плоскости сечения, если радиус основания конуса равен 1.

$\frac{5}{2\sqrt{3}}$

71. (МИОО, 2014) Высота SO правильной треугольной пирамиды $SABC$ составляет $5/7$ от высоты SM боковой грани SAB . Найдите угол между плоскостью основания пирамиды и её боковым ребром.

$\frac{9\sqrt{5}}{5}$ ссылка

70. (МИОО, 2014) Дана правильная четырёхугольная пирамида $MABCD$, рёбра основания которой равны $5\sqrt{2}$. Тангенс угла между прямыми DM и AL равен $\sqrt{2}$, L — середина ребра MB . Найдите высоту данной пирамиды.

$\frac{5}{2}$

69. (МИОО, 2013) Площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна 108, а площадь полной поверхности этой пирамиды равна 144. Найдите площадь сечения, проходящего через вершину S этой пирамиды и через диагональ её основания.

98

68. (МИОО, 2013) Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра основания которой равны $2\sqrt{7}$. Сечение, проходящее через боковое ребро AA_1 и середину M ребра B_1C_1 , является квадратом. Найдите расстояние между прямыми A_1B и AM .

$\frac{7}{9\sqrt{3}}$

67. (МИОО, 2013) В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны рёбра $AB = 5$, $AD = 4$, $AA_1 = 9$. Точка O принадлежит ребру BB_1 и делит его в отношении $4 : 5$, считая от вершины B . Найдите площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A , O и C_1 .

1821^

66. (ЕГЭ, 2013) В правильной треугольной пирамиде $MABC$ с вершиной M высота равна 3, а боковые рёбра равны 6. Найдите площадь сечения этой пирамиды плоскостью, проходящей через середины сторон AB и AC параллельно прямой MA .

$\frac{2}{27}$

65. (ЕГЭ, 2013) В правильную шестиугольную пирамиду, боковое ребро которой равно $\sqrt{5}$, а высота равна 1, вписана сфера. (Сфера касается всех граней пирамиды.) Найдите площадь этой сферы.

$\pi(7 - 4\sqrt{3})$

64. (ЕГЭ, 2013) Радиус основания конуса равен 8, а его высота равна 15. Плоскость сечения содержит вершину конуса и хорду основания, длина которой равна 14. Найдите расстояние от центра основания конуса до плоскости сечения.

$\frac{4}{15}$

63. (ЕГЭ, 2013) В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания равна 6, а боковое ребро $AA_1 = 1$. Точка F принадлежит ребру $C_1 D_1$ и делит его в отношении $2 : 1$, считая от вершины C_1 . Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через точки A , C и F .

$12\sqrt{2}$

62. (ЕГЭ, 2013) В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 3, а боковые рёбра равны 8. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку B и середину ребра MD параллельно прямой AC .

$2\sqrt{5}$

61. (ЕГЭ, 2013) Две параллельные плоскости, расстояние между которыми равно 2, пересекают шар. Одна из плоскостей проходит через центр шара. Отношение площадей сечений шара этими плоскостями равно 0,84. Найдите радиус шара.

9

60. (ЕГЭ, 2013) Плоскость α пересекает два шара, имеющих общий центр. Площадь сечения меньшего шара этой плоскостью равна 7. Плоскость β , параллельная плоскости α , касается меньшего шара, а площадь сечения этой плоскостью большего шара равна 5. Найдите площадь сечения большего шара плоскостью α .

12

59. (МИОО, 2013) Правильные треугольники ABC и BCM лежат в перпендикулярных плоскостях, $BC = 8$. Точка P — середина CM , а точка T делит отрезок BM так, что $BT : TM = 1 : 3$. Вычислите объём пирамиды $MPTA$.

24

58. (МИОО, 2013) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ боковое ребро равно $8\sqrt{3}$, а ребро основания равно 1. Точка D — середина ребра BB_1 . Найдите объём пятигранника $ABCA_1D$.

3

57. (ФЦТ, 2013) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC проведено сечение через середины рёбер AB и BC и вершину S . Найдите площадь этого сечения, если боковое ребро пирамиды равно 7, а сторона основания равна 8.

27^2

56. (МИОО, 2013) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка S — вершина. Точка M — середина ребра SA , точка K — середина ребра SC . Найдите угол между плоскостями BMK и ABC , если $AB = 10$, $SC = 8$.

10^7

55. (МИОО, 2013) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC сторона основания равна 8, а угол ASB равен 36° . На ребре SC взята точка M так, что AM — биссектриса угла SAC . Найдите площадь сечения пирамиды, проходящего через точки A , M и B .

16^9

54. (МИОО, 2012) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 8, а боковые рёбра равны $\sqrt{13}$. Изобразите сечение, проходящее через вершины A , C и середину ребра A_1B_1 . Найдите его площадь.

03

53. (МИОО, 2012) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ проведено сечение через середины рёбер AB и BC и вершину S . Найдите площадь этого сечения, если все рёбра пирамиды равны 8.

3^8

52. (ЕГЭ, 2012) В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AB = 2$, $AD = AA_1 = 1$. Найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью ABC_1 .

10^1

51. (ЕГЭ, 2012) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 2, боковые рёбра равны 3, точка D — середина ребра CC_1 . Найдите расстояние от вершины C до плоскости ADB_1 .

3^1

50. (ЕГЭ, 2012) В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ стороны основания равны 2, а боковые рёбра равны 5. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE : EA_1 = 3 : 2$. Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1 .

$\frac{2}{\sqrt{17}}$ град

49. (ЕГЭ, 2012) Точка E — середина ребра AA_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Найдите площадь сечения куба плоскостью $C_1 DE$, если рёбра куба равны 2.

$\frac{2}{6}$

48. (ЕГЭ, 2012) На ребре CC_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ отмечена точка E так, что $CE : EC_1 = 1 : 2$. Найдите угол между прямыми BE и AC_1 .

$\frac{51}{10\sqrt{2}}$ град

47. (ЕГЭ, 2012) Точка E — середина ребра DD_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Найдите угол между прямыми CE и AC_1 .

$\frac{51}{4}$ град

46. (Репетиционный ЕГЭ, 2012) В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ со стороной основания 4 и высотой 7 на ребре AA_1 взята точка M так, что $AM = 2$. На ребре BB_1 взята точка K так, что $B_1 K = 2$. Найдите угол между плоскостью $D_1 MK$ и плоскостью $CC_1 D_1$.

45°

45. (Репетиционный ЕГЭ, 2012) Основанием прямого параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является ромб $ABCD$, сторона которого равна $4\sqrt{3}$, а угол BAD равен 60° . Найдите расстояние от точки A до прямой $C_1 D_1$, если известно, что боковое ребро данного параллелепипеда равно 8.

10

44. (ФЦТ, 2012) В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AB = 2$, $AD = 4$, $AA_1 = 3$ и точка E — середина ребра AB . Найдите угол между прямыми $A_1 C_1$ и $B_1 E$.

$\frac{10\sqrt{13}}{1}$ град

43. (Юг, пробный ЕГЭ, 2012) В пирамиде $DABC$ известны длины рёбер: $AB = AC = DB = DC = 13$ см, $DA = 6$ см, $BC = 24$ см. Найдите расстояние между прямыми DA и BC .

4 см

42. (МИОО, 2012) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка S — вершина. Точка M — середина ребра SA , точка K — середина ребра SB . Найдите угол между плоскостями CMK и ABC , если $SC = 6$, $AB = 4$.

$\frac{5}{\sqrt{22}}$ град

41. (МИОО, 2012) Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$. Боковое ребро $SA = \sqrt{5}$, сторона основания равна 2. Найдите расстояние от точки B до плоскости ADM , где M — середина ребра SC .

1

40. (МИОО, 2011) В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания равна $\sqrt{2}$, а высота равна 1. M — середина ребра AA_1 . Найдите расстояние от точки M до плоскости $DA_1 C_1$.

$\frac{\sqrt{2}}{2}$

39. (МИОО, 2011) Основанием прямой призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ является равнобедренный треугольник ABC , $AB = AC = 5$, $BC = 8$. Высота призмы равна 3. Найдите угол между прямой $A_1 B$ и плоскостью BCC_1 .

$\frac{5}{3}$ град

38. (МИОО, 2011) Основание прямой четырёхугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 12$, $AD = 5$. Найдите угол между плоскостью основания призмы и плоскостью, проходящей через середину ребра AD перпендикулярно прямой BD_1 , если расстояние между прямыми AC и $B_1 D_1$ равно 13.

45°

37. (ЕГЭ, 2011) В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, стороны основания которой равны 3, а боковые рёбра равны 4, найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью BDD_1 .

$\frac{3\sqrt{2}}{10}$ град

36. (ЕГЭ, 2011) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$, все рёбра которой равны 1, точка E — середина ребра SB . Найдите угол между прямой CE и плоскостью SBD .

$\frac{2}{3}$ град

35. (ЕГЭ, 2011) В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC_1 .

$\frac{2}{3\sqrt{3}}$

34. (ЕГЭ, 2011) В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, стороны основания которой равны 3, а боковые рёбра равны 4, найдите расстояние от точки C до прямой $D_1 E_1$.

$\frac{7}{16\sqrt{3}}$

33. (ЕГЭ, 2011) В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, стороны основания которой равны 4, а боковые рёбра равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой $F_1 E_1$.

$\frac{1}{2}$

32. (ЕГЭ, 2011) В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, стороны основания которой равны 3, а боковые рёбра равны 4, найдите угол между прямыми AC и BC_1 .

$\frac{3\sqrt{2}}{10}$ град

31. (Репетиционный ЕГЭ, 2011) В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 12. Найдите расстояние от центра основания до боковой грани, если двугранный угол при ребре основания равен $\pi/3$.

3

30. (Репетиционный ЕГЭ, 2011) Длины всех рёбер правильной четырёхугольной пирамиды $PABCD$ с вершиной P равны между собой. Найдите угол между прямой BM и плоскостью BDP , если точка M — середина бокового ребра пирамиды AP .

$\frac{5\sqrt{2}}{1} \arctg 2$

29. (МИОО, 2011) Основанием прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является ромб $ABCD$, у которого $AB = 10$, $BD = 12$. Высота призмы равна 6. Найдите расстояние от центра грани $A_1 B_1 C_1 D_1$ до плоскости BDC_1 .

$\frac{5}{\sqrt{2}}$

28. (МИОО, 2011) В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB , равной $2\sqrt{10}$; высота призмы равна $2\sqrt{5}$. Найдите расстояние от точки C_1 до плоскости BCM , где M — середина ребра $A_1 C_1$.

2

27. (МИОО, 2011) Длина ребра куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равна 1. Найдите расстояние от вершины B до плоскости ACD_1 .

$\frac{2\sqrt{3}}{1}$

26. (МИОО, 2011) Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 1. Найдите расстояние от вершины A до плоскости $A_1 BT$, где T — середина ребра AD .

$\frac{9\sqrt{2}}{1}$

25. (МИОО, 2011) Дан правильный тетраэдр $MABC$ с ребром 1. Найдите расстояние между прямыми AL и MO , где L — середина ребра MC , O — центр грани ABC .

$\frac{11}{2\sqrt{3}}$

24. (МИОО, 2010) Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Длина ребра куба равна 1. Найдите расстояние от середины отрезка BC_1 до плоскости $AB_1 D_1$.

$\frac{2\sqrt{3}}{1}$

23. (МИОО, 2010) В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите угол между плоскостями $AB_1 D_1$ и ACD_1 .

$\frac{2}{1} \arccos \frac{1}{3}$

22. (МИОО, 2010) В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ известны рёбра: $AB = 3\sqrt{3}$, $BB_1 = 6$. Точка M — середина ребра $B_1 C_1$, а точка T — середина $A_1 M$. Найдите угол между плоскостью BCT и прямой AT .

$2 \arctg \frac{2}{3}$

21. (МИОО, 2010) В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AA_1 = 3$, $AD = 8$, $AB = 6$, найдите угол между плоскостью ADD_1 и прямой EF , проходящей через середины рёбер AB и $B_1 C_1$.

81/8

20. (МИОО, 2010) Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром $8\sqrt{6}$. Найдите расстояние от середины ребра $B_1 C_1$ до прямой MT , где точки M и T — середины рёбер CD и $A_1 B_1$ соответственно.

12

19. (ЕГЭ, 2010) Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Найдите тангенс угла между плоскостями $AB_1 C$ и DCC_1 .

2/3

18. (ЕГЭ, 2010) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC известны рёбра: $AB = 6\sqrt{3}$, $SC = 10$. Точка N — середина ребра BC . Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой AT , где T — середина отрезка SN .

51/8

17. (ЕГЭ, 2010) В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны рёбра: $AB = 8$, $AD = 6$, $CC_1 = 6$. Найдите угол между плоскостями $CD_1 B_1$ и $AD_1 B_1$.

17/6

16. (ЕГЭ, 2010) В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны рёбра: $AB = 8$, $AD = 6$, $CC_1 = 5$. Найдите угол между плоскостями BDD_1 и $AD_1 B_1$.

25/2

15. (ЕГЭ, 2010) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC известны рёбра: $AB = 8\sqrt{3}$, $SC = 17$. Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой, проходящей через середины рёбер AS и BC .

91/15

14. (ЕГЭ, 2010) В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ сторона основания равна 7, а высота равна 1. Найдите угол между прямой $F_1 B_1$ и плоскостью $AF_1 C_1$.

151/1

13. (МИОО, 2010) В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние от точки C до прямой $F_1 E_1$.

2

12. (МИОО, 2010) В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые рёбра равны 2, найдите расстояние от точки C до прямой SA .

4/63

11. (МИОО, 2010) В тетраэдре $ABCD$, все рёбра которого равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой, проходящей через точку B и середину E ребра CD .

$$\frac{\sqrt{3}}{2}$$

10. (Репетиционный ЕГЭ, 2010) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ сторона основания равна $3\sqrt{2}$, а боковое ребро равно 5. Найдите угол между плоскостями ABC и ACM , где точка M делит ребро BS так, что $BM : MS = 2 : 1$.

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

9. (МИОО, 2010) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания равна 1, а боковое ребро равно $\sqrt{3}/2$. Найдите расстояние от точки C до прямой SA .

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

8. (МИОО, 2010) В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все рёбра равны 1. Найдите расстояние от точки C до прямой BD_1 .

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

7. (МИОО, 2010) В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ высота равна 2, сторона основания равна 1. Найдите расстояние от точки B_1 до прямой AC_1 .

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

6. (МИОО, 2010) Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ равна 8. Высота этой призмы равна 6. Найдите угол между прямыми CA_1 и AB_1 .

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

5. (МИОО, 2010) В основании прямой призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB , равной $8\sqrt{2}$. Высота призмы равна 6. Найдите угол между прямыми AC_1 и CB_1 .

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

4. (МИОО, 2009) В основании прямой призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ лежит прямоугольный треугольник ABC , у которого угол C равен 90° , угол A равен 30° , $AC = 10\sqrt{3}$. Диагональ боковой грани B_1C составляет угол 30° с плоскостью $AA_1 B_1$. Найдите высоту призмы.

$$10$$

3. (МИОО, 2009) В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 6$, $BC = 6$, $CC_1 = 4$, найдите тангенс угла между плоскостями ACD_1 и $A_1 B_1 C_1$.

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

2. (МИОО, 2009) В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 4$, $BC = 6$, $CC_1 = 4$, найдите тангенс угла между плоскостью ABC и прямой EF , проходящей через середины рёбер AA_1 и $C_1 D_1$.

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

1. (МИОО, 2009) В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите угол между плоскостью $A_1 BC$ и прямой BC_1 , если $AA_1 = 8$, $AB = 6$, $BC = 15$.

$\frac{58}{17}$ град

0. (МИОО, 2009) В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, все рёбра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1 .

$\frac{1}{8}$