

Стереометрия на ЕГЭ по математике

Здесь приведены задачи по стереометрии, которые предлагались на ЕГЭ по математике (профильный уровень, сложная часть), а также на диагностических, контрольных и тренировочных работах МИОО начиная с 2009 года.

125. (ЕГЭ, 2017) Длина диагонали куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равна $3\sqrt{11}$. На луче $A_1 C$ отмечена точка P так, что $A_1 P = 4\sqrt{11}$.

- Докажите, что $PBDC_1$ — правильный тетраэдр.
- Найдите длину отрезка AP .

11 (9)

124. (ЕГЭ, 2017) На рёбрах AB и BC треугольной пирамиды $ABCD$ отмечены точки M и N соответственно, причём $AM : MB = CN : NB = 1 : 3$. Точки P и Q — середины рёбер DA и DC соответственно.

- Докажите, что точки P, Q, M и N лежат в одной плоскости.
- Найдите отношение объёмов многогранников, на которые плоскость PQM разбивает пирамиду.

37 : 6 (9)

123. (ЕГЭ, 2017) На ребре SD правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ отмечена точка M , причём $SM : MD = 1 : 4$. Точки P и Q — середины рёбер BC и AD соответственно.

- Докажите, что сечение пирамиды плоскостью MPQ является равнобедренной трапецией.
- Найдите отношение объёмов многогранников, на которые плоскость MPQ разбивает пирамиду.

11 : 11 (9)

122. (ЕГЭ, 2017) Основанием четырёхугольной пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$, причём $AB = 2\sqrt{3}$, $BC = 2\sqrt{6}$. Основанием высоты пирамиды является центр прямоугольника. Из вершин A и C опущены перпендикуляры AP и CQ на ребро SB .

- Докажите, что P — середина отрезка BQ .
- Найдите угол между гранями SBA и SBC , если $SD = 6$.

$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ (9)

121. (ЕГЭ, 2017) Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C , а боковая грань $ACC_1 A_1$ является квадратом.

- Докажите, что прямые CA_1 и AB_1 перпендикулярны.
- Найдите расстояние между прямыми CA_1 и AB_1 , если $AC = 1$, $BC = 4$.

$\frac{3}{2}$ (9)

120. (ЕГЭ, 2017) Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . Диагонали боковых граней AA_1B_1B и BB_1C_1C равны 15 и 9 соответственно, $AB = 13$.

- Докажите, что треугольник BA_1C_1 прямоугольный.
- Найдите объём пирамиды AA_1C_1B .

11^07 (9)

119. (ЕГЭ, 2017) В треугольной пирамиде $PABC$ с основанием ABC известно, что $AB = 13$, $PB = 15$, $\cos \angle PBA = \frac{48}{65}$. Основанием высоты этой пирамиды является точка C . Прямые PA и BC перпендикулярны.

- Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
- Найдите объём пирамиды $PABC$.

06 (9)

118. (ЕГЭ, 2017) Основанием прямой четырёхугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является ромб $ABCD$, $AB = AA_1$.

- Докажите, что прямые A_1C и BD перпендикулярны.
- Найдите объём призмы, если $A_1C = BD = 2$.

$\frac{8}{9\sqrt{4}}$ (9)

117. (ЕГЭ, 2017) Сечением прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью α , содержащей прямую BD_1 и параллельной прямой AC , является ромб.

- Докажите, что грань $ABCD$ — квадрат.
- Найдите угол между плоскостями α и BCC_1 , если $AA_1 = 6$, $AB = 4$.

31078 (9)

116. (Санкт-Петербург, пробный ЕГЭ, 2017) В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка M — середина ребра $C_1 D_1$, а точка K делит ребро AA_1 в отношении $AK : KA_1 = 1 : 3$. Через точки K и M проведена плоскость α , параллельная прямой BD и пересекающая диагональ $A_1 C$ в точке O .

- Докажите, что плоскость α делит диагональ $A_1 C$ в отношении $A_1 O : OC = 3 : 5$.
- Найдите угол между плоскостью α и плоскостью ABC , если $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб.

$\frac{2}{1}$ 81078 (9)

115. (МИОО, 2017) В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со стороной $AB = 4$ и диагональю $BD = 7$. Все боковые рёбра пирамиды равны 4. На диагонали BD основания $ABCD$ отмечена точка E , а на ребре AS — точка F так, что $SF = BE = 3$.

- Докажите, что плоскость CEF параллельна ребру SB .
- Плоскость CEF пересекает ребро SD в точке Q . Найдите расстояние от точки Q до плоскости ABC .

$\frac{4}{21\sqrt{2}}$ (9)

114. (МИОО, 2017) В одном основании прямого кругового цилиндра с высотой 3 и радиусом основания 8 проведена хорда AB , равная радиусу основания, а в другом его основании проведён диаметр CD , перпендикулярный AB . Построено сечение $ABNM$, проходящее через прямую AB перпендикулярно прямой CD так, что точка C и центр основания цилиндра, в котором проведён диаметр CD , лежат с одной стороны от сечения.

- а) Докажите, что диагонали этого сечения равны между собой.
- б) Найдите объём пирамиды $CABNM$.

$\frac{3}{16} + \frac{19}{9}$ (9)

113. (МИОО, 2017) Отрезок AB — диаметр верхнего основания цилиндра, CD — диаметр нижнего, причём отрезки AB и CD не лежат на параллельных прямых.

- а) Докажите, что у тетраэдра $ABCD$ скрещивающиеся рёбра попарно равны.
- б) Найдите объём этого тетраэдра, если $AC = 6$, $AD = 8$, а радиус цилиндра равен 3.

$\frac{8}{19}$ (9)

112. (МИОО, 2017) Точки P и Q — середины рёбер AD и CC_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ соответственно.

- а) Докажите, что прямые B_1P и QB перпендикулярны.
- б) Найдите площадь сечения куба плоскостью, проходящей через точку P и перпендикулярной прямой BQ , если ребро куба равно 2.

$\frac{5}{2\sqrt{2}}$ (9)

111. (МИОО, 2017) Дана правильная треугольная призма $ABCA_1 B_1 C_1$, у которой сторона основания равна 2, а боковое ребро равно 3. Через точки A , C_1 и середину T ребра $A_1 B_1$ проведена плоскость.

- а) Докажите, что сечение призмы указанной плоскостью является прямоугольным треугольником.
- б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью ABC .

$\frac{8}{3\sqrt{3}}$ (9)

110. (МИОО, 2017) В основании правильной треугольной пирамиды $ABCD$ лежит треугольник ABC со стороной, равной 6. Боковое ребро пирамиды равно 5. На ребре AD отмечена точка T так, что $AT : TD = 2 : 1$. Через точку T параллельно прямым AC и BD проведена плоскость.

- а) Докажите, что сечение пирамиды указанной плоскостью является прямоугольником.
- б) Найдите площадь сечения.

$\frac{8}{20}$ (9)

109. (МИОО, 2017) На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E : EA = 2 : 5$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1 F : FB = 1 : 6$, а точка T — середина ребра $B_1 C_1$. Известно, что $AB = 5$, $AD = 6$, $AA_1 = 14$.

- а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1 .
- б) Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью $AA_1 B_1$.

$\frac{10}{6\sqrt{2}}$ (9)

108. (МИОО, 2017) В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный ($AB = BC$) треугольник ABC . Точки K и M — середины рёбер A_1B_1 и AC соответственно.

а) Докажите, что $KM = KB$.

б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1 , если $AB = 8$, $AC = 6$ и $AA_1 = 3$.

$$\frac{9\sqrt{8}}{11\sqrt{3}} \text{ углов} \quad (9)$$

107. (ЕГЭ, 2016) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона AB основания равна 12, а высота призмы равна 2. На рёбрах B_1C_1 и AB отмечены точки P и Q соответственно, причём $PC_1 = 3$, а $AQ = 4$. Плоскость A_1PQ пересекает ребро BC в точке M .

а) Докажите, что точка M является серединой ребра BC .

б) Найдите расстояние от точки B до плоскости A_1PQ .

$$\frac{9}{09\sqrt{3}} \quad (9)$$

106. (ЕГЭ, 2016) На рёбрах CD и BB_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 12 отмечены точки P и Q соответственно, причём $DP = 4$, а $B_1Q = 3$. Плоскость APQ пересекает ребро CC_1 в точке M .

а) Докажите, что точка M является серединой ребра CC_1 .

б) Найдите расстояние от точки C до плоскости APQ .

$$\frac{81}{92\sqrt{21}} \quad (9)$$

105. (ЕГЭ, 2016) В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C , $AC = 4$, $BC = 16$, $AA_1 = 4\sqrt{2}$. Точка Q — середина ребра A_1B_1 , а точка P делит ребро B_1C_1 в отношении $1 : 2$, считая от вершины C_1 . Плоскость APQ пересекает ребро CC_1 в точке M .

а) Докажите, что точка M является серединой ребра CC_1 .

б) Найдите расстояние от точки A_1 до плоскости APQ .

$$\frac{19\sqrt{2}}{32} \quad (9)$$

104. (ЕГЭ, 2016) В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины рёбер: $AB = 4$, $BC = 3$, $AA_1 = 2$. Точки P и Q — середины рёбер A_1B_1 и CC_1 соответственно. Плоскость APQ пересекает ребро B_1C_1 в точке U .

а) Докажите, что $B_1U : UC_1 = 2 : 1$.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью APQ .

$$\frac{7}{8\sqrt{11}} \quad (9)$$

103. (ЕГЭ, 2016) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона AB основания равна $2\sqrt{3}$, а высота SH пирамиды равна 3. Точки M и N — середины рёбер CD и AB соответственно, а NT — высота пирамиды с вершиной N и основанием SCD .

а) Докажите, что точка T является серединой отрезка SM .

б) Найдите расстояние между прямыми NT и SC .

$$\frac{9}{91\sqrt{2}} \quad (9)$$

102. (ЕГЭ, 2016) В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона AB основания равна 8, а боковое ребро AA_1 равно $4\sqrt{2}$. На рёбрах BC и $C_1 D_1$ отмечены точки K и L соответственно, причём $BK = C_1 L = 2$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L .

- Докажите, что прямая $A_1 C$ перпендикулярна плоскости γ .
- Найдите расстояние от точки B до плоскости γ .

$\frac{8}{01\sqrt{2}}$ (9)

101. (ЕГЭ, 2016) В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ сторона AB основания равна 12, а боковое ребро AA_1 равно $3\sqrt{6}$. На рёбрах AB и $B_1 C_1$ отмечены точки K и L соответственно, причём $AK = 2$, $B_1 L = 4$. Точка M — середина ребра $A_1 C_1$. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L .

- Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ .
- Найдите расстояние от точки C до плоскости γ .

$\frac{3}{01\sqrt{6}}$ (9)

100. (ЕГЭ, 2016) В треугольной пирамиде $ABCD$ двугранные углы при рёбрах AD и BC равны, $AB = BD = DC = AC = 5$.

- Докажите, что $AD = BC$.
- Найдите объём пирамиды, если двугранные углы равны при рёбрах AD и BC равны 60° .

$\frac{3}{01\sqrt{10}}$ (9)

99. (ЕГЭ, 2016) В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $4\sqrt{3}$. На рёбрах AB , $A_1 D_1$ и $C_1 D_1$ отмечены точки M , N и K соответственно, причём $AM = A_1 N = C_1 K = 1$.

а) Пусть L — точка пересечения плоскости MNK с ребром BC . Докажите, что $MNKL$ — квадрат.

- Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK .

$\frac{3}{01\sqrt{10}}$ (9)

98. (МИОО, 2016) Дан прямой круговой конус с вершиной M . Осевое сечение конуса — треугольник с углом 120° при вершине M . Образующая конуса равна $2\sqrt{3}$. Через точку M проведено сечение конуса, перпендикулярное одной из образующих.

- Докажите, что получившийся в сечении треугольник тупоугольный.
- Найдите площадь сечения.

$\frac{3}{01\sqrt{10}}$ (9)

97. (МИОО, 2016) В одном основании прямого кругового цилиндра с высотой 12 и радиусом основания 6 проведена хорда AB , равная радиусу основания, а в другом его основании проведён диаметр CD , перпендикулярный AB . Построено сечение $ABNM$, проходящее через прямую AB перпендикулярно прямой CD так, что точка C и центр основания цилиндра, в котором проведён диаметр CD , лежат с одной стороны от сечения.

- Докажите, что диагонали этого сечения равны между собой.
- Найдите объём пирамиды $CABNM$.

$\frac{3}{01\sqrt{10}}$ (9)

96. (МИОО, 2016) Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 4. Через точки A , C_1 и середину T ребра A_1B_1 проведена плоскость.

а) Докажите, что сечение призмы указанной плоскостью является прямоугольным треугольником.

б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью ABC .

7.3.2 (9)

95. (МИОО, 2016) В основании правильной треугольной пирамиды $ABCD$ лежит треугольник ABC со стороной, равной 6. Боковое ребро пирамиды равно 4. Через такую точку T ребра AD , что $AT : TD = 3 : 1$, параллельно прямым AC и BD проведена плоскость.

а) Докажите, что сечение пирамиды указанной плоскостью является прямоугольником.

б) Найдите площадь сечения.

6.4.5 (9)

94. (МИОО, 2016) Все рёбра правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S равны 6. Основание O высоты SO этой пирамиды является серединой отрезка SS_1 , M — середина ребра AS , точка L лежит на ребре BC так, что $BL : LC = 1 : 2$.

а) Докажите, что сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью S_1LM — равнобокая трапеция.

б) Вычислите длину средней линии этой трапеции.

6.4.5 (9)

93. (МИОО, 2015) Все рёбра правильной треугольной пирамиды $SBCD$ с вершиной S равны 9. Основание O высоты SO этой пирамиды является серединой отрезка SS_1 , M — середина ребра SB , точка L лежит на ребре CD так, что $CL : LD = 7 : 2$.

а) Докажите, что сечение пирамиды $SBCD$ плоскостью S_1LM — равнобокая трапеция.

б) Вычислите длину средней линии этой трапеции.

6.5.7.5 (9)

92. (ЕГЭ, 2015) В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = \sqrt{5}$ и $BC = 2$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = \sqrt{7}$, $SB = 2\sqrt{3}$, $SD = \sqrt{11}$.

а) Докажите, что SA — высота пирамиды.

б) Найдите угол между прямой SC и плоскостью ASB .

6.3 (9)

91. (ЕГЭ, 2015) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ все рёбра равны 5. На рёбрах SA , AB , BC взяты точки P , Q , R соответственно так, что $PA = AQ = RC = 2$.

а) Докажите, что плоскость PQR перпендикулярна ребру SD .

б) Найдите расстояние от вершины D до плоскости PQR .

7.2 (9)

90. (ЕГЭ, 2015) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 24, а боковое ребро SA равно 19. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении $5 : 1$, считая от точки C .

б) Найдите площадь многоугольника, который является сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α .

101 (9)

89. (ЕГЭ, 2015) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 30, а боковое ребро SA равно 28. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении $5 : 1$, считая от точки C .

б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости α .

$\frac{7}{8}\sqrt{5}$ (9)

88. (ЕГЭ, 2015) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 30, а боковое ребро SA равно 28. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении $5 : 1$, считая от точки C .

б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка C , а основанием — сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α .

$\frac{8}{2730}$ (9)

87. (ЕГЭ, 2015) Основанием прямой четырёхугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является квадрат $ABCD$ со стороной $5\sqrt{2}$, высота призмы равна $2\sqrt{14}$. Точка K — середина ребра BB_1 . Через точки K и C_1 проведена плоскость α , параллельная прямой BD_1 .

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью α является равнобедренным треугольником.

б) Найдите периметр треугольника, являющегося сечением призмы плоскостью α .

97 (9)

86. (ЕГЭ, 2015) В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все рёбра равны 5. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 3$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α , параллельная прямой BD_1 .

а) Докажите, что $A_1P : PB_1 = 1 : 2$, где P — точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1 .

б) Найдите объём большей из двух частей куба, на которые он делится плоскостью α .

$\frac{6}{5201}$ (9)

85. (МИОО, 2015) На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1E : EA = 5 : 3$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1F : FB = 5 : 11$, а точка T — середина ребра B_1C_1 . Известно, что $AB = 6\sqrt{2}$, $AD = 10$, $AA_1 = 16$.

а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1 .

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью EFT .

5'26 (9)

84. (МИОО, 2015) На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E : EA = 3 : 4$. Точка T — середина ребра $B_1 C_1$. Известно, что $AB = 9$, $AD = 6$, $AA_1 = 14$.

- В каком отношении плоскость ETD_1 делит ребро BB_1 ?
- Найдите угол между плоскостью ETD_1 и плоскостью $AA_1 B_1$.

$\frac{8}{01}$ 3 : 11 : 8 (в)

83. (МИОО, 2015) На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E = 6EA$. Точка T — середина ребра $B_1 C_1$. Известно, что $AB = 4\sqrt{2}$, $AD = 12$, $AA_1 = 14$.

- Докажите, что плоскость ETD_1 делит ребро BB_1 в отношении 4 : 3.
- Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью ETD_1 .

06 (9)

82. (МИОО, 2015) В основании правильной треугольной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ лежит треугольник со стороной 6. Высота призмы равна 4. Точка N — середина ребра $A_1 C_1$.

- Постройте сечение призмы плоскостью BAN .
- Найдите периметр этого сечения.

61 (9)

81. (ЕГЭ, 2014) В правильной треугольной пирамиде $MABC$ стороны основания ABC равны 6, а боковые рёбра равны 8. На ребре AC находится точка D , на ребре AB находится точка E , а на ребре AM — точка L . Известно, что $CD = BE = LM = 2$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки E , D и L .

$2\sqrt{3}$

80. (ЕГЭ, 2014) В треугольной пирамиде $MABC$ основанием является правильный треугольник ABC , ребро MB перпендикулярно плоскости основания, стороны основания равны 3, а ребро MA равно 6. На ребре AC находится точка D , на ребре AB находится точка E , а на ребре AM — точка L . Известно, что $AD = AL = 2$ и $BE = 1$. Найдите угол между плоскостью основания и плоскостью, проходящей через точки E , D и L .

arctg 2

79. (ЕГЭ, 2014) В треугольной пирамиде $MABC$ основанием является правильный треугольник ABC , ребро MA перпендикулярно плоскости основания, стороны основания равны 3, а ребро MB равно 5. На ребре AC находится точка D , на ребре AB находится точка E , а на ребре AM — точка L . Известно, что $AD = 2$ и $BE = ML = 1$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки E , D и L .

$2\sqrt{3}$

78. (ЕГЭ, 2014) Высота цилиндра равна 3. Равнобедренный треугольник ABC с боковой стороной 10 углом $\angle A = 120^\circ$ расположен так, что его вершина A лежит на окружности нижнего основания цилиндра, а вершины B и C — на окружности верхнего основания. Найдите угол между плоскостью ABC и плоскостью основания цилиндра.

arcsin $\frac{3}{5}$

77. (ЕГЭ, 2014) В правильной треугольной пирамиде $MABC$ с вершиной M сторона основания AB равна 6. На ребре AB отмечена точка K так, что $AK : KB = 5 : 1$. Сечение MKC является равнобедренным треугольником с основанием MK . Найдите угол между боковыми гранями пирамиды.

$$\frac{11}{289} \arcsin \frac{2}{\sqrt{17}}$$

76. (ЕГЭ, 2014) Косинус угла между боковой гранью и основанием правильной треугольной пирамиды равен $\sqrt{3}/4$. Найдите угол между боковыми гранями этой пирамиды.

$$\frac{23}{7} \arccos \frac{7}{23}$$

75. (ЕГЭ, 2014) Радиус основания конуса с вершиной P равен 6, а длина его образующей равна 9. На окружности основания конуса выбраны точки A и B , делящие окружность на две дуги, длины которых относятся как 1 : 3. Найдите площадь сечения конуса плоскостью ABP .

$$\frac{11}{4} \sqrt{6}$$

74. (МИОО, 2014) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC боковое ребро равно 5, а сторона основания равна 6. Найдите расстояние от вершины A до плоскости SBC .

$$\frac{1}{6\sqrt{13}}$$

73. (Санкт-Петербург, пробный ЕГЭ, 2014) Отрезок AC — диаметр основания конуса, отрезок AP — образующая этого конуса и $AP = AC$. Хорда основания BC составляет с прямой AC угол 60° . Через AP проведено сечение конуса плоскостью, параллельной прямой BC . Найдите расстояние от центра основания конуса O до плоскости сечения, если радиус основания конуса равен 1.

$$\frac{5}{2\sqrt{13}}$$

72. (МИОО, 2014) Высота SO правильной треугольной пирамиды $SABC$ составляет $5/7$ от высоты SM боковой грани SAB . Найдите угол между плоскостью основания пирамиды и её боковым ребром.

$$\frac{9}{5} \arctan \frac{5}{9}$$

71. (МИОО, 2014) Дана правильная четырёхугольная пирамида $MABCD$, рёбра основания которой равны $5\sqrt{2}$. Тангенс угла между прямыми DM и AL равен $\sqrt{2}$, L — середина ребра MB . Найдите высоту данной пирамиды.

$$\frac{5}{2}$$

70. (МИОО, 2013) Площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна 108, а площадь полной поверхности этой пирамиды равна 144. Найдите площадь сечения, проходящего через вершину S этой пирамиды и через диагональ её основания.

$$\frac{96}{5}$$

69. (МИОО, 2013) Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра основания которой равны $2\sqrt{7}$. Сечение, проходящее через боковое ребро AA_1 и середину M ребра B_1C_1 , является квадратом. Найдите расстояние между прямыми A_1B и AM .

$$\frac{2}{9}\sqrt{}$$

68. (МИОО, 2013) В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны рёбра $AB = 5$, $AD = 4$, $AA_1 = 9$. Точка O принадлежит ребру BB_1 и делит его в отношении $4 : 5$, считая от вершины B . Найдите площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A , O и C_1 .

$$18\sqrt{}$$

67. (ЕГЭ, 2013) В правильной треугольной пирамиде $MABC$ с вершиной M высота равна 3, а боковые рёбра равны 6. Найдите площадь сечения этой пирамиды плоскостью, проходящей через середины сторон AB и AC параллельно прямой MA .

$$\frac{2}{17}\sqrt{}$$

66. (ЕГЭ, 2013) В правильную шестиугольную пирамиду, боковое ребро которой равно $\sqrt{5}$, а высота равна 1, вписана сфера. (Сфера касается всех граней пирамиды.) Найдите площадь этой сферы.

$$\pi \left(7 - 4\sqrt{3} \right)$$

65. (ЕГЭ, 2013) Радиус основания конуса равен 8, а его высота равна 15. Плоскость сечения содержит вершину конуса и хорду основания, длина которой равна 14. Найдите расстояние от центра основания конуса до плоскости сечения.

$$\frac{4}{15}\sqrt{}$$

64. (ЕГЭ, 2013) В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания равна 6, а боковое ребро $AA_1 = 1$. Точка F принадлежит ребру $C_1 D_1$ и делит его в отношении $2 : 1$, считая от вершины C_1 . Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через точки A , C и F .

$$2\sqrt{}$$

63. (ЕГЭ, 2013) В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 3, а боковые рёбра равны 8. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку B и середину ребра MD параллельно прямой AC .

$$5\sqrt{}$$

62. (ЕГЭ, 2013) Две параллельные плоскости, расстояние между которыми равно 2, пересекают шар. Одна из плоскостей проходит через центр шара. Отношение площадей сечений шара этими плоскостями равно 0,84. Найдите радиус шара.

$$\frac{5}{9}$$

61. (ЕГЭ, 2013) Плоскость α пересекает два шара, имеющих общий центр. Площадь сечения меньшего шара этой плоскостью равна 7. Плоскость β , параллельная плоскости α , касается меньшего шара, а площадь сечения этой плоскостью большего шара равна 5. Найдите площадь сечения большего шара плоскостью α .

12

60. (МИОО, 2013) Правильные треугольники ABC и BCM лежат в перпендикулярных плоскостях, $BC = 8$. Точка P — середина CM , а точка T делит отрезок BM так, что $BT : TM = 1 : 3$. Вычислите объём пирамиды $MPTA$.

24

59. (МИОО, 2013) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ боковое ребро равно $8\sqrt{3}$, а ребро основания равно 1. Точка D — середина ребра BB_1 . Найдите объём пятигранника $ABCA_1D$.

3

58. (ФЦТ, 2013) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC проведено сечение через середины рёбер AB и BC и вершину S . Найдите площадь этого сечения, если боковое ребро пирамиды равно 7, а сторона основания равна 8.

2 $\sqrt{29}$

57. (МИОО, 2013) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка S — вершина. Точка M — середина ребра SA , точка K — середина ребра SC . Найдите угол между плоскостями BMK и ABC , если $AB = 10$, $SC = 8$.

$\arctg \frac{10}{7}$

56. (МИОО, 2013) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC сторона основания равна 8, а угол ASB равен 36° . На ребре SC взята точка M так, что AM — биссектриса угла SAC . Найдите площадь сечения пирамиды, проходящего через точки A , M и B .

3 $\sqrt{91}$

55. (МИОО, 2012) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 8, а боковые рёбра равны $\sqrt{13}$. Изобразите сечение, проходящее через вершины A , C и середину ребра A_1B_1 . Найдите его площадь.

03

54. (МИОО, 2012) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ проведено сечение через середины рёбер AB и BC и вершину S . Найдите площадь этого сечения, если все рёбра пирамиды равны 8.

3 $\sqrt{8}$

53. (ЕГЭ, 2012) В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AB = 2$, $AD = AA_1 = 1$. Найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью ABC_1 .

$\frac{01}{1} \arcsin$

52. (ЕГЭ, 2012) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 2, боковые рёбра равны 3, точка D — середина ребра CC_1 . Найдите расстояние от вершины C до плоскости ADB_1 .

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

51. (ЕГЭ, 2012) В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ стороны основания равны 2, а боковые рёбра равны 5. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE : EA_1 = 3 : 2$. Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1 .

$$\arctan \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

50. (ЕГЭ, 2012) Точка E — середина ребра AA_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Найдите площадь сечения куба плоскостью C_1DE , если рёбра куба равны 2.

$$2/6$$

49. (ЕГЭ, 2012) На ребре CC_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ отмечена точка E так, что $CE : EC_1 = 1 : 2$. Найдите угол между прямыми BE и AC_1 .

$$\arccos \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

48. (ЕГЭ, 2012) Точка E — середина ребра DD_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Найдите угол между прямыми CE и AC_1 .

$$\arctan \frac{1}{3}$$

47. (Репетиционный ЕГЭ, 2012) В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ со стороной основания 4 и высотой 7 на ребре AA_1 взята точка M так, что $AM = 2$. На ребре BB_1 взята точка K так, что $B_1K = 2$. Найдите угол между плоскостью D_1MK и плоскостью CC_1D_1 .

$$45^\circ$$

46. (Репетиционный ЕГЭ, 2012) Основанием прямого параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является ромб $ABCD$, сторона которого равна $4\sqrt{3}$, а угол BAD равен 60° . Найдите расстояние от точки A до прямой C_1D_1 , если известно, что боковое ребро данного параллелепипеда равно 8.

$$10$$

45. (ФЦТ, 2012) В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AB = 2$, $AD = 4$, $AA_1 = 3$ и точка E — середина ребра AB . Найдите угол между прямыми A_1C_1 и B_1E .

$$\arctan \frac{1}{3}$$

44. (Юг, пробный ЕГЭ, 2012) В пирамиде $DABC$ известны длины рёбер: $AB = AC = DB = DC = 13$ см, $DA = 6$ см, $BC = 24$ см. Найдите расстояние между прямыми DA и BC .

$$4 \text{ см}$$

43. (МИОО, 2012) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка S — вершина. Точка M — середина ребра SA , точка K — середина ребра SB . Найдите угол между плоскостями CMK и ABC , если $SC = 6$, $AB = 4$.

$$\arctan \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

42. (МИОО, 2012) Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$. Боковое ребро $SA = \sqrt{5}$, сторона основания равна 2. Найдите расстояние от точки B до плоскости ADM , где M — середина ребра SC .

1

41. (МИОО, 2011) В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания равна $\sqrt{2}$, а высота равна 1. M — середина ребра AA_1 . Найдите расстояние от точки M до плоскости $DA_1 C_1$.

$\frac{\sqrt{2}}{2}$

40. (МИОО, 2011) Основанием прямой призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ является равнобедренный треугольник ABC , $AB = AC = 5$, $BC = 8$. Высота призмы равна 3. Найдите угол между прямой $A_1 B$ и плоскостью BCC_1 .

$\frac{5}{3}$

39. (МИОО, 2011) Основание прямой четырёхугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 12$, $AD = 5$. Найдите угол между плоскостью основания призмы и плоскостью, проходящей через середину ребра AD перпендикулярно прямой BD_1 , если расстояние между прямыми AC и $B_1 D_1$ равно 13.

45

38. (ЕГЭ, 2011) В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, стороны основания которой равны 3, а боковые рёбра равны 4, найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью BDD_1 .

$\frac{10}{\sqrt{13}}$

37. (ЕГЭ, 2011) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$, все рёбра которой равны 1, точка E — середина ребра SB . Найдите угол между прямой CE и плоскостью SBD .

$\sqrt{2}$

36. (ЕГЭ, 2011) В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC_1 .

$\frac{\sqrt{2}}{2}$

35. (ЕГЭ, 2011) В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, стороны основания которой равны 3, а боковые рёбра равны 4, найдите расстояние от точки C до прямой $D_1 E_1$.

$\frac{\sqrt{16}}{3}$

34. (ЕГЭ, 2011) В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, стороны основания которой равны 4, а боковые рёбра равны 1, найдите расстояние от точки B до прямой $F_1 E_1$.

2

33. (ЕГЭ, 2011) В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, стороны основания которой равны 3, а боковые рёбра равны 4, найдите угол между прямыми AC и BC_1 .

$\frac{01}{\sqrt{5}}$ score

32. (Репетиционный ЕГЭ, 2011) В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 12. Найдите расстояние от центра основания до боковой грани, если двугранный угол при ребре основания равен $\pi/3$.

8

31. (Репетиционный ЕГЭ, 2011) Длины всех рёбер правильной четырёхугольной пирамиды $PABCD$ с вершиной P равны между собой. Найдите угол между прямой BM и плоскостью BDP , если точка M — середина бокового ребра пирамиды AP .

$\frac{9\sqrt{2}}{1}$ score

30. (МИОО, 2011) Основанием прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является ромб $ABCD$, у которого $AB = 10$, $BD = 12$. Высота призмы равна 6. Найдите расстояние от центра грани $A_1 B_1 C_1 D_1$ до плоскости BDC_1 .

$\frac{9}{\sqrt{2}}$

29. (МИОО, 2011) В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB , равной $2\sqrt{10}$; высота призмы равна $2\sqrt{5}$. Найдите расстояние от точки C_1 до плоскости BCM , где M — середина ребра $A_1 C_1$.

2

28. (МИОО, 2011) Длина ребра куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равна 1. Найдите расстояние от вершины B до плоскости ACD_1 .

$\frac{9\sqrt{2}}{1}$

27. (МИОО, 2011) Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 1. Найдите расстояние от вершины A до плоскости $A_1 BT$, где T — середина ребра AD .

$\frac{9\sqrt{2}}{1}$

26. (МИОО, 2011) Дан правильный тетраэдр $MABC$ с ребром 1. Найдите расстояние между прямыми AL и MO , где L — середина ребра MC , O — центр грани ABC .

$\frac{11}{\sqrt{2}}$

25. (МИОО, 2010) Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Длина ребра куба равна 1. Найдите расстояние от середины отрезка BC_1 до плоскости $AB_1 D_1$.

$\frac{9\sqrt{2}}{1}$

24. (МИОО, 2010) В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите угол между плоскостями $AB_1 D_1$ и ACD_1 .

$\frac{9}{1}$ score

23. (МИОО, 2010) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ известны рёбра: $AB = 3\sqrt{3}$, $BB_1 = 6$. Точка M — середина ребра B_1C_1 , а точка T — середина A_1M . Найдите угол между плоскостью BCT и прямой AT .

$\frac{2}{3} \arctg \frac{3}{8}$

22. (МИОО, 2010) В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AA_1 = 3$, $AD = 8$, $AB = 6$, найдите угол между плоскостью ADD_1 и прямой EF , проходящей через середины рёбер AB и B_1C_1 .

$\frac{5}{8} \arctg \frac{3}{8}$

21. (МИОО, 2010) Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром $8\sqrt{6}$. Найдите расстояние от середины ребра B_1C_1 до прямой MT , где точки M и T — середины рёбер CD и A_1B_1 соответственно.

$\frac{7}{12}$

20. (ЕГЭ, 2010) Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Найдите тангенс угла между плоскостями AB_1C и DCC_1 .

$\frac{7}{8}$

19. (ЕГЭ, 2010) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC известны рёбра: $AB = 6\sqrt{3}$, $SC = 10$. Точка N — середина ребра BC . Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой AT , где T — середина отрезка SN .

$\frac{15}{8} \arctg \frac{3}{8}$

18. (ЕГЭ, 2010) В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны рёбра: $AB = 8$, $AD = 6$, $CC_1 = 6$. Найдите угол между плоскостями CD_1B_1 и AD_1B_1 .

$\frac{17}{6} \operatorname{arccos} \frac{17}{6}$

17. (ЕГЭ, 2010) В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны рёбра: $AB = 8$, $AD = 6$, $CC_1 = 5$. Найдите угол между плоскостями BDD_1 и AD_1B_1 .

$\frac{7}{24} \arctg \frac{27}{24}$

16. (ЕГЭ, 2010) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC известны рёбра: $AB = 8\sqrt{3}$, $SC = 17$. Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой, проходящей через середины рёбер AS и BC .

$\frac{9}{16} \arctg \frac{16}{9}$

15. (ЕГЭ, 2010) В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ сторона основания равна 7, а высота равна 1. Найдите угол между прямой F_1B_1 и плоскостью AF_1C_1 .

$\frac{19}{1} \arctg \frac{19}{1}$

14. (МИОО, 2010) В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние от точки C до прямой F_1E_1 .

$\frac{7}{2}$

13. (МИОО, 2010) В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые рёбра равны 2, найдите расстояние от точки C до прямой SA .

$$\frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{2}}$$

12. (МИОО, 2010) В тетраэдре $ABCD$, все рёбра которого равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой, проходящей через точку B и середину E ребра CD .

$$\frac{\sqrt{2}}{3}$$

11. (Репетиционный ЕГЭ, 2010) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ сторона основания равна $3\sqrt{2}$, а боковое ребро равно 5. Найдите угол между плоскостями ABC и ACM , где точка M делит ребро BS так, что $BM : MS = 2 : 1$.

$$\frac{\sqrt{2}}{3}$$

10. (МИОО, 2010) В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания равна 1, а боковое ребро равно $\sqrt{3}/2$. Найдите расстояние от точки C до прямой SA .

$$\frac{\sqrt{2}}{3}$$

9. (МИОО, 2010) В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все рёбра равны 1. Найдите расстояние от точки C до прямой BD_1 .

$$\frac{\sqrt{2}}{3}$$

8. (МИОО, 2010) В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ высота равна 2, сторона основания равна 1. Найдите расстояние от точки B_1 до прямой AC_1 .

$$\frac{\sqrt{2}}{3}$$

7. (МИОО, 2010) Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ равна 8. Высота этой призмы равна 6. Найдите угол между прямыми CA_1 и AB_1 .

$$\frac{\sqrt{2}}{3}$$

6. (МИОО, 2010) В основании прямой призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB , равной $8\sqrt{2}$. Высота призмы равна 6. Найдите угол между прямыми AC_1 и CB_1 .

$$\frac{\sqrt{2}}{3}$$

5. (МИОО, 2009) В основании прямой призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ лежит прямоугольный треугольник ABC , у которого угол C равен 90° , угол A равен 30° , $AC = 10\sqrt{3}$. Диагональ боковой грани $B_1 C$ составляет угол 30° с плоскостью $AA_1 B_1$. Найдите высоту призмы.

$$\frac{\sqrt{2}}{3}$$

4. (МИОО, 2009) В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 6$, $BC = 6$, $CC_1 = 4$, найдите тангенс угла между плоскостями ACD_1 и $A_1 B_1 C_1$.

$$\frac{\sqrt{2}}{3}$$

3. (МИОО, 2009) В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 4$, $BC = 6$, $CC_1 = 4$, найдите тангенс угла между плоскостью ABC и прямой EF , проходящей через середины рёбер AA_1 и $C_1 D_1$.

$$\frac{01^{\wedge}}{1}$$

2. (МИОО, 2009) В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите угол между плоскостью $A_1 BC$ и прямой BC_1 , если $AA_1 = 8$, $AB = 6$, $BC = 15$.

$$\frac{98}{12} \text{ цифр}$$

1. (МИОО, 2009) В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, все рёбра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1 .

$$\frac{7}{8}$$