

## Доказательство неравенств (new)

Данный листок является продолжением пособия «Доказательство неравенств», которое больше не модифицируется по техническим причинам<sup>1</sup>.

1. (Всеросс., 2020, ШЭ, 11.6) Для положительных чисел  $a$ ,  $b$  и  $c$  докажите неравенство

$$\frac{1+bc}{a} + \frac{1+ca}{b} + \frac{1+ab}{c} > \sqrt{a^2+2} + \sqrt{b^2+2} + \sqrt{c^2+2}.$$

2. (Всеросс., 2019, МЭ, 11.2) Известно, что  $ab < 0$ . Докажите, что

$$a^2 + b^2 + c^2 > 2ab + 2bc + 2ca.$$

3. (Всеросс., 2018, РЭ, 9.5) Числа  $x$ ,  $y$  и  $z$  удовлетворяют условию  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Докажите, что

$$(x-y)(y-z)(x-z) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

4. (Всеросс., 2018, финал, 9.3) Пусть  $a_1, \dots, a_{25}$  — целые неотрицательные числа, а  $k$  — наименьшее из них. Докажите, что

$$[\sqrt{a_1}] + [\sqrt{a_2}] + \dots + [\sqrt{a_{25}}] \geq \left[ \sqrt{a_1 + \dots + a_{25} + 200k} \right].$$

(Как обычно, через  $[x]$  обозначается целая часть числа  $x$ , то есть наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ .)

5. (Всеросс., 2018, РЭ, 10.3) Положительные числа  $x$ ,  $y$  таковы, что  $x^5 - y^3 \geq 2x$ . Докажите, что  $x^3 \geq 2y$ .

6. («Высшая проба», 2017, 10–11) Числа  $P_1, \dots, P_n$  являются перестановкой чисел  $\{1, \dots, n\}$  (то есть каждое  $P_i$  равно одному из  $1, \dots, n$  и все  $P_i$  различны). Докажите неравенство

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{P_i + P_{i+1}} > \frac{n-1}{n+2}.$$

7. (Всеросс., 2019, финал, 9.8) Даны числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , не меньшие 1. Докажите, что

$$\frac{a+b+c}{4} \geq \frac{\sqrt{ab-1}}{b+c} + \frac{\sqrt{bc-1}}{c+a} + \frac{\sqrt{ca-1}}{a+b}.$$

<sup>1</sup>Так уж вышло, что оказался утрачен исходный tex-файл. Набирать всё это заново у меня нет возможности. Если кто желает поучаствовать в восстановлении документа — пишите.

8. (Всеросс., 2018, финал, 11.2) Даны положительные числа  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , где  $n \geq 2$ . Докажите, что

$$\frac{1+x_1^2}{1+x_1x_2} + \frac{1+x_2^2}{1+x_2x_3} + \dots + \frac{1+x_{n-1}^2}{1+x_{n-1}x_n} + \frac{1+x_n^2}{1+x_nx_1} \geq n.$$

9. (ММО, 2019, 11.4) Докажите, что для любых различных натуральных чисел  $m$  и  $n$  справедливо неравенство

$$|\sqrt[n]{m} - \sqrt[n]{n}| > \frac{1}{mn}.$$