

Принцип Дирихле

1. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 5–6.4, 7–8.5, 9.4) В правильном 2017-угольнике провели все диагонали. Петя выбирает наугад какие-то N диагоналей. При каком наименьшем N среди выбранных диагоналей гарантированно найдутся две, имеющие одинаковую длину?

2. («Ломоносов», 2017, 7–8.4) На окружности отмечено 100 точек, которые покрашены в красный или синий цвет. Некоторые точки соединены отрезками, причём у любого отрезка один конец синий, а другой — красный. Известно, что не существует двух красных точек, принадлежащих одинаковому количеству отрезков. Каково наибольшее возможное число красных точек?

3. («Ломоносов», 2015, 10–11) В ящике лежат сто разноцветных шариков: 28 красных, 20 зелёных, 13 жёлтых, 19 синих, 11 белых и 9 чёрных. Какое наименьшее число шариков надо вытащить, не заглядывая в ящик, чтобы среди них заведомо оказалось не менее 15 шариков одного цвета?

92

4. (Всеросс., 2019, ШЭ, 11.6) Внутри шляпы волшебника живут 100 кроликов: белые, синие и зелёные. Известно, что если произвольным образом вытащить из шляпы 81 кролика, то среди них обязательно найдутся три разноцветных. Какое наименьшее количество кроликов нужно достать из шляпы, чтобы среди них точно было два разноцветных?

19

5. (Турнир городов, 2016, 8–9) По кругу стоят мальчики и девочки (есть и те, и другие), всего 20 детей. Известно, что у каждого мальчика сосед по часовой стрелке — ребёнок в синей футболке, а у каждой девочки сосед против часовой стрелки — ребёнок в красной футболке. Можно ли однозначно установить, сколько в круге мальчиков?

17

6. (Турнир городов, 2015, 8–11) На кольцевой дороге через равные промежутки расположены 25 постов, на каждом стоит полицейский. Полицейские пронумерованы в каком-то порядке числами от 1 до 25. Требуется, чтобы они перешли по дороге так, чтобы снова на каждом посту был полицейский, но по часовой стрелке за номером 1 стоял номер 2, за номером 2 стоял номер 3, ..., за номером 25 стоял номер 1. Докажите, что если организовать переход так, чтобы суммарное пройденное расстояние было наименьшим, то кто-то из полицейских останется на своём посту.

7. («Курчатов», 2016, 9) Есть 64 шашки трёх цветов, разбитые на пары так, что в каждой паре цвета шашек различны. Докажите, что все шашки можно расставить на шахматной доске так, чтобы шашки в каждом двухклеточном прямоугольнике были разных цветов.

8. («Курчатов», 2016, 10) Есть 64 шашки нескольких цветов, разбитые на пары так, что в каждой паре цвета шашек различны. Докажите, что все шашки можно расставить на шахматной доске так, чтобы шашки в каждом двухклеточном прямоугольнике были разных цветов.

9. (ММО, 2015, 9) Каждый день Фрёкен Бок выпекает квадратный торт размером 3×3 . Карлсон немедленно вырезает себе из него четыре квадратных куска размером 1×1 со сторонами, параллельными сторонам торта (не обязательно по линиям сетки 3×3). После этого Малыш вырезает себе из оставшейся части торта квадратный кусок со сторонами, также параллельными сторонам торта. На какой наибольший кусок торта может рассчитывать Малыш вне зависимости от действий Карлсона?

$\frac{\varepsilon}{1} \times \frac{\varepsilon}{1}$

10. (Турнир городов, 2015, 10–11) Ковёр имеет форму квадрата со стороной 275 см. Моль проела в нем четыре дырки. Можно ли гарантированно вырезать из ковра квадратный кусок со стороной 1 м, не содержащий дырок? Дырки считайте точечными.

¶

11. (ММО, 2015, 11) Единичный квадрат разрезан на n треугольников. Докажите, что одним из треугольников можно накрыть квадрат со стороной $1/n$.

12. («Высшая проба», 2018, 11.6) В пространстве даны 5 точек, таких что в проекциях на координатные плоскости никакие три точки не лежат на одной прямой. Могло ли оказаться так, что каждая точка ровно в одной из этих проекций лежит внутри выпуклой оболочки остальных? (Мы говорим, что точка лежит внутри выпуклой оболочки других точек, если она лежит внутри треугольника с вершинами в некоторых трёх из этих точек.)

13. (Всеросс., 2015, финал, 9, 11) В волейбольном турнире участвовали 110 команд, каждая сыграла с каждой из остальных ровно одну игру (в волейболе не бывает ничьих). Оказалось, что в любой группе из 55 команд найдётся одна, которая проиграла не более, чем четырём из остальных 54 команд этой группы. Докажите, что во всём турнире найдётся команда, проигравшая не более, чем четырём из остальных 109 команд.

14. (ММО, 2015, 11) На поверхности сферической планеты расположены четыре материка, отделённые друг от друга океаном. Назовем точку океана *особой*, если для нее найдутся не менее трёх ближайших (находящихся от нее на равных расстояниях) точек суши, причём все на разных материках. Какое наибольшее число особых точек может быть на этой планете?

4