Делимость. Разное

1. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2014, 7–8*) Найдите наибольшее трёхзначное число, которое кратно сумме своих цифр и в котором первая цифра совпадает с третьей, но не совпадает со второй.

828

2. (*Всеросс., 2015, I этап, 9*) Сколько существует трёхзначных чисел, которые в 5 раз больше произведения своих цифр?

Одно

3. (*«Курчатов», 2017, 8*) Учительница дала Васе и Пете два одинаковых картонных n-угольника. Вася разрезал свой многоугольник по непересекающимся диагоналям на 33-угольники, а Петя разрезал свой многоугольник по непересекающимся диагоналям на 67-угольники. Найдите наименьшее возможное значение n.

2017

4. (*«Высшая проба», 2019, 8–9*) Делитель натурального числа называется собственным, если он отличен от 1 и самого этого числа. Найдите все натуральные числа, у которых разница между суммой двух самых больших собственных делителей и суммой двух самых маленьких собственных делителей есть простое число.

5. (*«Ломоносов», 2012, 9*) Найдите все такие значения n, что среди любого набора из n натуральных чисел, являющихся точными квадратами, всегда найдутся два числа, разность которых делится на 2011.

$n \geqslant 1007$

6. (*«Высшая проба», 2015, 9*) Найти все натуральные числа n, такие, что число n^2+77n является точным квадратом натурального числа.

4, 99, 175, 1444

7. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2014, 9*) Найдите площадь треугольника, если известно, что радиус вписанной окружности равен 1, а длины всех трёх высот выражаются целыми числами.

$3\sqrt{3}$

8. (*«Физтех», 2015, 10–11*) Найдите количество натуральных чисел k, не превосходящих 353500 и таких, что $k^2 + k$ делится нацело на 505.

2800

9. (*«Физтех», 2015, 10–11*) Найдите количество натуральных чисел k, не превосходящих 445000 и таких, что $k^2 - 1$ делится нацело на 445.

4000

10. (*«Высшая проба», 2015, 10*) а) Найти хотя бы два различных натуральных числа n, для каждого из которых число $n^2 + 2015n$ является точным квадратом натурального числа.

б) Найти *количество всех* натуральных чисел n, для каждого из которых число $n^2 + 2015n$ является точным квадратом натурального числа.

а) 496 и 1007^2; б) 13

11. (*«Физтех», 2013, 10*) При каком наибольшем натуральном значении n число $n! + 5n + 52$ является точным квадратом?

2

12. (*«Физтех», 2011, 10*) Найдите натуральное число, которое ровно в 25 раз меньше, чем сумма всех натуральных чисел, меньших его и делящихся на 31.

1581

13. (*Всеросс., 2015, I этап, 11*) Сколько существует натуральных чисел n, для которых $4^n - 15$ является квадратом целого числа?

Два

14. (*«Физтех», 2011, 11*) Два трёхзначных числа таковы, что сумма остальных трёхзначных чисел ровно в 770 раз больше одного из них. Найдите наибольшее из этих чисел.

641

15. (*«Курчатов», 2019, 10*) Определите все натуральные числа n, имеющие ровно $\sqrt{n}$ натуральных делителей (включая 1 и само число n).

16. (*«Курчатов», 2019, 11*) Найдите все такие пары натуральных чисел m и n, что $m^{2019} + n$ делится на mn.

17. (*«Ломоносов», 2006*) На клетчатой бумаге отмечен прямоугольник размером $m \times n$ клеток, причём числа m и n взаимно просты и $m < n$. Диагональ этого прямоугольника не пересекает ровно 116 его клеток. Найдите все возможные значения m и n при данных условиях.

$(1, 117)$ или $(3, 59)$

18. (*«Высшая проба», 2015, 11*) Обозначим через T_k произведение первых k нечётных простых чисел: $T_1 = 3$, $T_2 = 3 \cdot 5$, $T_6 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$ и т. д. Для каждого натурального k найти количество натуральных чисел n таких, что число $n^2 + T_k n$ является точным квадратом натурального числа. Решить задачу: а) для $k = 1$; б) для $k = 2$; в) для произвольного заданного натурального k.

в) $\frac{3^k-1}{2}$

19. (*«Ломоносов», 2015, 10–11*) Маша, скучая на уроке математики, проделала с некоторым 2015-значным натуральным числом следующую операцию: от десятичной записи этого числа она отбросила последнюю цифру и к умноженному на 3 получившемуся числу прибавила удвоенную отброшенную цифру. С полученным числом она опять проделала ту же операцию и так далее. После многократного применения этой операции получающиеся у Маши числа перестали меняться, и тогда она остановилась.

а) Какое число оказалось у Маши в конце?

б) Какое наименьшее число могло быть у Маши в самом начале (укажите две его последние цифры)?

а) 17; б) 09 (число 100...009)