

Комбинированные уравнения и неравенства. 2

1. (МГУ, ДВИ, 2012.3) Решите неравенство

$$(9^x - 3^{x+2} + 14) \cdot \sqrt{4 - 2^x} \leq 0.$$

$$\{2\} \cap [2; \log_3 280]$$

2. (МГУ, ДВИ, 2013.3) Решите неравенство

$$9(1 + 5^{1-2x})^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(5^{2x} + 5)^{\frac{1}{2}} \geq 6^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{x}{2}}.$$

$$1 \geq x \geq 0$$

3. (МГУ, ВШБ, 2004) Решите уравнение

$$\log_{\frac{1}{2}}(2 \sin x) + \log_2(\sqrt{3} \cos x) = -1.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{\pi}{6}$$

4. (МГУ, экономич. ф-т, 2005) Решите уравнение

$$\sqrt{\log_{\frac{1}{9}} \operatorname{ctg} \frac{2x}{9}} + \sqrt{\log_{\frac{1}{9}} \sin 4x} = 0.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, \frac{\pi}{6} + \frac{8\pi}{9}$$

5. (МГУ, мехмат, 1998) Решите уравнение

$$3 \cdot 2^{\cos x + 3\sqrt{1-\sin^2 x}} + 11 \cdot 2^{2\cos x} - 34 = 0.$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{\pi}{6}$$

6. (МГУ, мехмат, 1999-05.1) Решить уравнение

$$(x^2 + 4) \lg(\sin^2 3x) + x^2 \lg(\cos^2 2x) = 4 \lg(\cos 2x \sin^3 3x).$$

$$\mathbb{Z} \ni u, u\pi + \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}$$

7. (МГУ, мехмат, 2003-07.2) Решить уравнение

$$|5^{\log_x 122} - x^{\log_5 x} + 614| = 636 - 5^{\log_x 122} - x^{\log_5 x}.$$

$$\frac{25}{1}$$

8. (МГУ, ИСАА, 2008) Найти корни уравнения

$$\cos \frac{4\pi}{x} + \sin \frac{8\pi}{x} = 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{x} \right),$$

удовлетворяющие неравенству $\log_{x+2}(x^2 - 2x + 4) \leq 1$.

$$\frac{\pi}{8}, \frac{6\pi}{7}, \frac{\pi}{8}$$

9. («Покори Воробьёвы горы!», 2015) Найдите корни уравнения

$$\log_2 |\operatorname{tg} \pi x| + \log_4 \frac{\cos \pi x}{2 \cos \pi x + \sin \pi x} = 0,$$

принадлежащие отрезку $[\frac{9}{4}; 3]$.

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2 \operatorname{arctg} \frac{\pi}{11}}$$

10. («Покори Воробьёвы горы!», 2011) Решите уравнение

$$(3 \log_{|5x-3|} 2 \cdot \log_2 |5x-3| - x) \sqrt{5x^2 - 9x + 4} = 0.$$

$$\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{11}$$

11. («Покори Воробьёвы горы!», 2013) Найдите все значения x , при каждом из которых выражения

$$\log_{2012} \left(\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x} + \operatorname{ctg} x \right) \quad \text{и} \quad \log_{2013} \left(\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x} - \operatorname{ctg} x \right)$$

равны друг другу.

$$\mathbb{Z} \ni u, \operatorname{arctg} \frac{\pi}{11} = x$$

12. («Покори Воробьёвы горы!», 2013) Найти все пары вещественных чисел (x, y) , удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} (2 - \sqrt{3})^x = 3^y + 4^y, \\ \sqrt{-x^2 - 3xy - y^2} = 2y + \frac{x}{2}. \end{cases}$$

$$\frac{\pi}{11} = \operatorname{arctg} \frac{\pi}{11} = x$$

13. («Покори Воробьёвы горы!», 2014) Найдите количество корней уравнения

$$3^{\frac{3 \sin x - 2}{2 \sin x - 1}} - 2 = 3^{\frac{1 - \sin x}{2 \sin x - 1}},$$

принадлежащих промежутку $[-\frac{\pi}{2}; 13\pi]$.

$$1$$

14. («Покори Воробьёвы горы!», 2012) Решите систему

$$\begin{cases} 4 \cos^2 x + \cos^2 5y = 4 \cos x \cos^6 5y, \\ \lg(x - y)^2 < 2 \lg(2\pi) - \lg 5 - \lg 45. \end{cases}$$

$$\mathbb{Z} \ni y \in \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$$

15. («Физтех», 2011) Решите уравнение

$$\log_{\operatorname{ctg} x}(\operatorname{ctg} x - 2) + \log_{(\operatorname{ctg} x - 2)} \sqrt{\operatorname{tg} x} = \frac{3}{2}.$$

$$\mathbb{Z} \ni y \in \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$$

16. («Физтех», 2009) Решите неравенство

$$\left| 4^{\sqrt{x+3} - \frac{1}{2}} - 2 \right| + \frac{10}{3} \leq \frac{4^{\sqrt{x+3} + \frac{3}{2}}}{3} - 16^{\sqrt{x+3} - \frac{1}{2}}.$$

$$\left[\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{11} \right]$$

17. (СПбГУ, 2011) Найти все целые решения уравнения

$$\cos \left(\frac{1000! \cdot \pi}{2^x} \right) = 0.$$

$$\{66\}$$

18. («Покори Воробьёвы горы!», 2010) Найдите все x из отрезка $[0; 2\pi]$, для которых

$$\log_{\sin x} \cos x > \log_{\operatorname{ctg} x} \cos x.$$

$$\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \cap \left(\frac{\pi}{2}, 0 \right)$$

19. («Покори Воробьёвы горы!», 2006) Решите уравнение

$$\log_{\cos x} \frac{4(1 - \sin x)}{3} = 2.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

20. («Ломоносов», 2006) Решите неравенство

$$(1 - \operatorname{ctg} x)^{2006} + 4(1 + \operatorname{ctg} x)^{2004} \leq 2^{2006}.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

21. («Ломоносов», 2005) Решите уравнение

$$\log_4(4 \operatorname{ctg}^2 x) - \log_2(-2 \sin 2x) = 1.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$$

22. (МГУ, мех.мат., 2006.2) Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{1+3^{-x}}}{\sqrt{1+3^{-x}}-\sqrt{1-3^{-x}}}-\frac{3^{-x}-1}{\sqrt{1-9^{-x}}+3^{-x}-1}\geq\frac{1+\sqrt{1-9^{-x}}}{3^{-x}}.$$

(∞:0)