Комбинированные уравнения и неравенства. 1

Настоящая статья посвящена уравнениям и неравенствам, в которых переменная присутствует как под знаком корня, так и под знаком модуля. Никаких новых методов здесь нет; в разбираемых задачах мы увидим совместную работу тех идей и приёмов, которые уже знакомы вам по предыдущим статьям.

Задача 1. (*МФТИ, 2007*) Решить уравнение

$$5\sqrt{1+|x^2-1|}=3+|5x+3|.$$

Решение. Замена $t=5x$ приводит к уравнению

$$\sqrt{25+|t^2-25|}=3+|t+3|. \tag{1}$$

Точками перемены знака хотя бы одного из выражений под модулем служат значения $t=\pm5$ и $t=3$. Соответственно, рассматриваем четыре промежутка.

1. Если $t\leqslant-5$, то левая часть уравнения (1) равна $\sqrt{t^2}=|t|=-t$, и уравнение принимает вид
$$-t=3-t-3 \quad\Leftrightarrow\quad 0=0.$$
Получилось верное числовое равенство, которое означает, что все значения $t\leqslant-5$ являются решениями уравнения (1).

2. Если $-5\leqslant t\leqslant-3$, то уравнение (1) принимает вид
$$\sqrt{50-t^2}=-t.$$
Легко видеть, что это уравнение имеет единственный корень $t=-5$, который мы уже получили выше.

3. Если $-3\leqslant t\leqslant 5$, то уравнение (1) принимает вид
$$\sqrt{50-t^2}=t+6.$$
Правая часть полученного уравнения положительна при рассматриваемых t, поэтому оно равносильно уравнению
$$50-t^2=(t+6)^2 \quad\Leftrightarrow\quad t^2+6t-7=0$$
с корнями 1 и -7, из которых лишь $t=1$ принадлежит расматриваемому промежутку и потому служит решением уравнения (1).

4. Наконец, если $t\geqslant5$, то уравнение (1) примет вид
$$t=3+t+3,$$
а такое уравнение не имеет решений.

Итак, решениями уравнения (1) служат значения $t \leqslant -5$ и $t = 1$. Остаётся сделать обратную замену $x = t/5$ и записать ответ.

Ответ: $(-\infty; -1] \cup \left\{\frac{1}{5}\right\}$.

Задача 2. (*МГУ, физический ф-т, 2005*) Решите систему

$$\begin{cases} y + 2\sqrt{x+y} = 15 - x, \\ |x - 2(2y+1)| + 3|x - 4(y-1)| = 6. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем первое уравнение:

$$(x+y) + 2\sqrt{x+y} + 1 = 16 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\sqrt{x+y}+1\right)^2 = 16,$$

что с учётом положительности выражения $\sqrt{x+y}+1$ равносильно уравнению

$$\sqrt{x+y} + 1 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x + y = 9. \tag{2}$$

Перейдём ко второму уравнению системы:

$$|x - 4y - 2| + 3|x - 4y + 4| = 6,$$

которое после замены $t = x - 4y$ примет вид

$$|t - 2| + 3|t + 4| = 6. \tag{3}$$

Если $t \leqslant -4$, то уравнение (3) равносильно

$$2 - t - 3(t+4) = 6 \quad \Leftrightarrow \quad t = -4;$$

это значение годится. Если $-4 \leqslant t \leqslant 2$, то (3) равносильно

$$2 - t + 3(t+4) = 6 \quad \Leftrightarrow \quad t = -4;$$

то же самое. Наконец, если $t \geqslant 2$, то (3) равносильно

$$t - 2 + 3(t+4) = 6 \quad \Leftrightarrow \quad t = -1;$$

это не годится. Итак, уравнение (3) имеет единственный корень $t = -4$, откуда

$$x - 4y = -4. \tag{4}$$

В результате получаем систему уравнений (2) и (4), равносильную исходной системе:

$$\begin{cases} x + y = 9, \\ x - 4y = -4. \end{cases}$$

Данная система решается элементарно.

Ответ: $\left(\frac{32}{5}, \frac{13}{5}\right)$.

Задача 3. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11*) Решите неравенство

$$\sqrt{7-x} \cdot |x^2 - 3| \leqslant \sqrt{7-x} \cdot |x^2 - 14x + 27|.$$

Решение. ОДЗ неравенства есть множество $x \leqslant 7$. Заметим, что $x = 7$ является решением. При $x < 7$ сокращение нашего неравенства на положительную величину $\sqrt{7-x}$ приводит к равносильному неравенству

$$|x^2-3| \leqslant |x^2-14x+27| \quad\Leftrightarrow\quad \left(x^2-3\right)^2 \leqslant \left(x^2-14x+27\right)^2 \quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad \left((x^2-3)-(x^2-14x+27)\right)\left((x^2-3)+(x^2-14x+27)\right) \leqslant 0 \quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad (7x-15)(x^2-7x+12) \leqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad \left(x-\frac{15}{7}\right)(x-3)(x-4) \leqslant 0,$$

которое легко решается методом интервалов: $x \leqslant \frac{15}{7}$, $3 \leqslant x \leqslant 4$. Все эти значения x удовлетворяют ограничению $x < 7$ и потому являются решениями исходного неравенства.

Ответ: $\left(-\infty; \frac{15}{7}\right] \cup [3;4] \cup \{7\}$.

Задача 4. (*МГУ, физический ф-т, 2000*) Решите неравенство

$$\sqrt{x^2+|1-x|-2} > x-1. \tag{5}$$

Решение. Пусть сначала $x \in E_1 = (-\infty; 1)$. Тогда неравенство (5) равносильно неравенству

$$\sqrt{x^2+(1-x)-2} > x-1 \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{x^2-x-1} > x-1.$$

Правая часть полученного неравенства отрицательна при рассматриваемых x, поэтому оно равносильно на множестве E_1 неравенству

$$x^2-x-1 \geqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} x \leqslant \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \\ x \geqslant \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}. \end{array}\right.$$

В пересечении с множеством E_1 (с учётом того, что $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 1$ и $\frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$) получаем часть решений неравенства (5):

$$x \leqslant \frac{1-\sqrt{5}}{2}. \tag{6}$$

Пусть теперь $x \in E_2 = [1; +\infty)$. В этом случае неравенство (5) равносильно неравенству

$$\sqrt{x^2+x-3} > x-1,$$

которое ввиду неотрицательности своей правой части равносильно на множестве E_2 неравенству

$$x^2+x-3 > (x-1)^2 \quad\Leftrightarrow\quad x > \frac{4}{3}. \tag{7}$$

Все эти значения x принадлежат множеству E_2 и потому служат решениями неравенства (5). Остаётся объединить множества (6) и (7).

Ответ: $\left(-\infty; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$.

Задача 5. (*МГУ, ВМК, 1994*) Решить неравенство

$$\sqrt{x-3} \leqslant 3-|x-6|.$$

Решение. Не составляет труда и здесь снять модуль на двух промежутках, решая в каждом случае простое иррациональное неравенство. Но в этой задаче можно поступить изящнее. Сделаем замену $t = \sqrt{x-3}$ и придём к неравенству

$$t \leqslant 3 - |t^2 - 3| \quad \Leftrightarrow \quad |t^2 - 3| \leqslant 3 - t \tag{8}$$

при ограничении

$$t \geqslant 0. \tag{9}$$

Как вы знаете из статьи «Неравенства с модулем», неравенство (8) равносильно системе

$$\begin{cases} t^2 - 3 \leqslant 3 - t, \\ t^2 - 3 \geqslant t - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} t^2 + t - 6 \leqslant 0, \\ t^2 - t \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (t+3)(t-2) \leqslant 0, \\ t(t-1) \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -3 \leqslant t \leqslant 2, \\ \left[\begin{aligned} & t \leqslant 0, \\ & t \geqslant 1 \end{aligned} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} & -3 \leqslant t \leqslant 0, \\ & 1 \leqslant t \leqslant 2, \end{aligned} \right.$$

откуда с учётом ограничения (9) имеем $t = 0$ или $1 \leqslant t \leqslant 2$. Теперь обратная замена:

$$\left[\begin{aligned} & \sqrt{x-3} = 0, \\ & 1 \leqslant \sqrt{x-3} \leqslant 2 \end{aligned} \right. \Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} & x = 3, \\ & 4 \leqslant x \leqslant 7. \end{aligned} \right.$$

Ответ: $\{3\} \cup [4; 7]$.

Задача 6. (*«Физтех», 2013*) Решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{|x+2| - 1}} \leqslant \frac{1}{5+x}. \tag{10}$$

Решение. Найдём ОДЗ данного неравенства:

$$\begin{cases} |x+2| - 1 > 0, \\ 5 + x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \left[\begin{aligned} & x < -3, \\ & x > -1, \end{aligned} \right. \\ x \neq -5 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} & x < -5, \\ & -5 < x < -3, \\ & x > -1. \end{aligned} \right.$$

Заметим, что при $x < -5$ неравенство (10) не имеет решений, поскольку его левая часть положительна, а правая — отрицательна. Поэтому будем решать наше неравенство на множестве $E = (-5; -3) \cup (-1; +\infty)$.

Оба знаменателя в (10) положительны при $x \in E$; умножая неравенство на положительную величину $(5+x)\sqrt{|x+2| - 1}$, получим равносильное на множестве E неравенство

$$\sqrt{|x+2| - 1} \geqslant 5 + x,$$

которое ввиду условия $5 + x > 0$ равносильно на E неравенству

$$|x+2| - 1 \geqslant (5+x)^2 \quad \Leftrightarrow \quad |x+2| \geqslant x^2 + 10x + 26,$$

эквивалентное в свою очередь (снова вспоминаем статью «Неравенства с модулем») совокупности

$$\left[\begin{aligned} & x + 2 \geqslant x^2 + 10x + 26, \\ & x + 2 \leqslant -(x^2 + 10x + 26) \end{aligned} \right. \Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} & x^2 + 9x + 24 \leqslant 0, \\ & x^2 + 11x + 28 \leqslant 0. \end{aligned} \right.$$

Первое неравенство этой совокупности не имеет решений (дискриминант отрицателен), а решения второго неравенства составляют отрезок $-7 \leqslant x \leqslant -4$. Пересекая этот отрезок с множеством E, получаем множество $-5 < x \leqslant -4$ решений неравенства (10).

Ответ: $(-5; -4]$.

Задача 7. (*«Ломоносов», 2007*) Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x+8} - |2x+1|}{\sqrt{7-x} - |2x+1|} \geqslant 1. \tag{11}$$

Решение. Радикалы определены при

$$\begin{cases} x+8 \geqslant 0, \\ 7-x \geqslant 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad -8 \leqslant x \leqslant 7.$$

Поэтому решаем неравенство (11) на множестве $E = [-8; 7]$. Преобразуем:

$$\frac{\sqrt{x+8} - |2x+1|}{\sqrt{7-x} - |2x+1|} - 1 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{x+8} - \sqrt{7-x}}{\sqrt{7-x} - |2x+1|} \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{x+8} - \sqrt{7-x}}{\sqrt{7-x} - \sqrt{(2x+1)^2}} \geqslant 0. \tag{12}$$

Последнее преобразование понадобилось нам вот зачем. Поскольку функция $y = \sqrt{x}$ монотонно возрастает, знак разности $\sqrt{A} - \sqrt{B}$ совпадает со знаком разности $A - B$. Следовательно, неравенство (12) эквивалентно на множестве E неравенству[1]

$$\frac{(x+8) - (7-x)}{(7-x) - (2x+1)^2} \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x+1}{4x^2+5x-6} \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x+1}{4(x+2)\left(x - \frac{3}{4}\right)} \leqslant 0,$$

которое легко решается методом интервалов:

$$x < -2, \quad -\frac{1}{2} \leqslant x < \frac{3}{4}\,. \tag{13}$$

Пересекая множество (13) с множеством E, получаем ответ.

Ответ: $[-8; -2) \cup \left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$.

Задачи

При отсутствии словесной формулировки требуется решить уравнение, систему уравнений или неравенство.

1. (*МГУ, биологич. ф-т, 2004*) $\sqrt{x+2} = |x-1|$.

$\boxed{\frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}}$

2. (*МГУ, химический ф-т, 2007*) $(x^2 - 7|x| + 6)\sqrt{4x+23} = 0$.

$\boxed{-\frac{23}{4};\ \pm 1;\ 6}$

3. (*МГУ, географич. ф-т, 1996*) $\sqrt{2-x^2} = |x| - 1$.

$\boxed{\pm\frac{1+\sqrt{3}}{2}}$

[1] Другие примеры использования подобной процедуры смотрите в статье «Метод рационализации».

4. (*МГУ, географич. ф-т, 1999*)

$$\sqrt{|x^2+14x+47|-1} = |x+7|-1.$$

$\boxed{-9,\ -8,\ -6,\ -5}$

5. (*МГУ, физический ф-т, 2002*) $4+\sqrt{x+9} = |x+5|.$

$\boxed{-9,\ \frac{-1+\sqrt{33}}{2}}$

6. (*МГУ, мехмат, 1994*) $3\sqrt{x+4} = 5-2|x+2|.$

$\boxed{-\frac{15}{4},\ -3,\ -\frac{7}{4}}$

7. (*МФТИ, 1997*) $\left|3\sqrt{x}+2-x\right|+\left|x-3\sqrt{x}+3\right| = 9.$

$\boxed{16}$

8. (*МФТИ, 2007*) $\sqrt{25+\left|16x^2-25\right|} = 4+4|x+1|.$

$\boxed{\left(-\infty; -\frac{5}{4}\right] \cup \left\{-\frac{1}{4}\right\}}$

9. (*МГУ, экономич. ф-т, 1996*)

$$\begin{cases} |-x| - \sqrt[3]{y+3} = 1, \\ \left(-x\sqrt{-x}\right)^2 - y = 10. \end{cases}$$

$\boxed{(-2; -2)}$

10. (*МГУ, физический ф-т, 2003*)

$$\begin{cases} \sqrt{x-y} = 9-|x+2y|, \\ x(x+4y-2)+y(4y+2) = 41. \end{cases}$$

$\boxed{(5; 1);\ \left(\frac{1}{3}; -\frac{11}{3}\right)}$

11. (*МГУ, физический ф-т, 2005*)

$$\begin{cases} x+4\sqrt{x-y} = y+12, \\ |2(x+1)+y|+2|2x+y-1| = 3. \end{cases}$$

$\boxed{\left(\frac{5}{3}; -\frac{7}{3}\right)}$

12. (*«Физтех», 2016, 9–10*)

$$8\left|x-\sqrt{x}+2\right| + 2x\sqrt{x} < x^2+x+28.$$

$\boxed{[0; 4) \cup (9; +\infty)}$

13. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11*)

$$\sqrt{9-x}\cdot|x^2-1| \leqslant \sqrt{9-x}\cdot|x^2-10x+13|.$$

$\boxed{\left(-\infty; \frac{7}{5}\right] \cup [2;3] \cup \{9\}}$

14. (*МГУ, химический ф-т, 2006*) $\sqrt{1-|x|} \geqslant x-2.$

$\boxed{[-1;1]}$

15. (*МГУ, геологич. ф-т, 1997*)

$$\sqrt{|x+1|-1} > \sqrt{|x+1|-1997}\,.$$

$\boxed{(-\infty;-1998] \cup [1996;+\infty)}$

16. (*МГУ, ВШБ, 2003*)

$$\left|\sqrt{x+4}-2\right| > \frac{6}{\sqrt{x+4}-3}\,.$$

$\boxed{[-4;5) \cup (21;+\infty)}$

17. (*МГУ, физический ф-т, 2003*)

$$\sqrt{12x^2+42x+1}+|2x^2+7x| \geqslant 9.$$

$\boxed{(-\infty;-4] \cup \left[\frac{1}{2};+\infty\right)}$

18. (*МГУ, мехмат, 1998*)

$$3\sqrt{|x+1|-3} \geqslant \sqrt{x^2-2x-3}\,.$$

$\boxed{\left[3;\frac{11+\sqrt{61}}{2}\right]}$

19. (*МГУ, экономич. ф-т, 1993*) $3\sqrt{x+2} \leqslant 6-|x-2|.$

$\boxed{[-2;-1] \cup \{2\}}$

20. (*МГУ, геологич. ф-т, 2001*) $|x-6|+\sqrt{3x+1} \leqslant 5.$

$\boxed{\left[5;\frac{25-\sqrt{145}}{2}\right]}$

21. (*МГУ, ф-т психологии, 2003*) $|3x+1|+\sqrt{3x+4} \leqslant 3.$

$\boxed{\left\{-\frac{4}{3}\right\} \cup [-1;0]}$

22. (*МГУ, биологич. ф-т, 1997*) $\sqrt{|1-8x|-2} \leqslant x+1.$

$\boxed{\left[-5+\sqrt{23};-\frac{1}{8}\right] \cup \left[\frac{3}{8};3-\sqrt{5}\right] \cup \left[3+\sqrt{5};+\infty\right)}$

23. (*МГУ, физический ф-т, 2000*) $\sqrt{x^2+|x-4|-18} > x-4.$

$\boxed{\left(-\infty; \frac{1-\sqrt{57}}{2}\right] \cup \left(\frac{38}{9}; +\infty\right)}$

24. (*МГУ, физический ф-т, 1997*) $\sqrt{x^2+x+4} \leqslant 2x+|3x-2|.$

$\boxed{(-\infty; 0] \cup \left[\frac{7}{8}; +\infty\right)}$

25. (*МГУ, географич. ф-т, 2003*)

$$2\sqrt{9-x^2} < x+3\left(\sqrt{2}+1\right) - \left|x+3\left(\sqrt{2}-1\right)\right|.$$

$\boxed{\left[-3; -\frac{3}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(-\frac{3}{\sqrt{2}}; 0\right) \cup (0; 3]}$

26. (*МГУ, ВМК, 1998*)

$$\left|\sqrt{x-4}-3\right| > \left|\sqrt{9-x}-2\right| + 1.$$

$\boxed{\left[4; \frac{13}{2}\right)}$

27. (*МГУ, ИСАА, 1999*)

$$\frac{\sqrt{x^2-3}-3}{|x+2|-5} \geqslant 1.$$

$\boxed{(-\infty; -7) \cup \left[\sqrt{3}; 3\right)}$

28. (*МГУ, ВМК, 2004*)

$$\frac{x^2-4}{\sqrt{15+2x-x^2}} \geqslant |x|-2.$$

$\boxed{(-3; -2] \cup \left[\frac{3-\sqrt{31}}{2}; \frac{\sqrt{23}-1}{2}\right] \cup [2; 5)}$

29. (*МГУ, мехмат, 1996*)

$$\frac{x^3-8+6x(2-x)}{|3-4x|} \leqslant \sqrt{4x-3}\,.$$

$\boxed{\left(\frac{3}{4}; 7\right]}$

30. (*МФТИ, 2000*)

$$\frac{\sqrt{-x^2+7x-6}}{|x^2-6x+5|-|x^2-2x-3|} \leqslant 0.$$

$\boxed{[1; 2) \cup \left(2+\sqrt{3}; 6\right]}$

31. (*МФТИ, 2005*)

$$\frac{|x^2-5x+6|+|9-2x|-5}{\sqrt{19x^2-4x^3-4x+19}} \leqslant 0.$$

$\boxed{\left[2; \frac{3+\sqrt{41}}{2}\right]}$

32. (*МФТИ, 2002*)

$$\sqrt{\frac{500+30x-2x^2}{2x+5}} > 10-|x|.$$

$\boxed{(-\infty;-10)\cup\left(-\frac{5}{2};0\right)\cup\left(\frac{5}{2};25\right]}$

33. (*«Физтех», 2013*)

$$\frac{1}{\sqrt{|x-3|-1}} \leqslant \frac{1}{6-x}\,.$$

$\boxed{[5;6)}$

34. (*«Физтех», 2017, 10*)

$$\sqrt{\frac{|x|-12}{2-x}} > x.$$

$\boxed{(-\infty;-12]\cup(2;3)}$

35. (*«Физтех», 2017, 10*)

$$\sqrt{\sqrt{x+1}-2}+\sqrt{x+82-18\sqrt{x+1}} > 5.$$

$\boxed{[3;35)\cup(120;+\infty)}$

36. (*МФТИ, 2003*)

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+4x-5}-4} < \frac{1}{2|x+6|-5}\,.$$

$\boxed{\left(-8-\sqrt{6};-\frac{17}{2}\right)\cup\left(-7;\frac{-20+\sqrt{22}}{3}\right)\cup[1;3)}$

37. (*МГУ, ВМК, 1990*)

$$\sqrt{9x^2-48x-21}+\sqrt{9x^2-51x-15} \leqslant |3x-6|.$$

$\boxed{\left[\frac{27-4\sqrt{66}}{9};\frac{8-\sqrt{85}}{3}\right]\cup\left[\frac{17+\sqrt{349}}{6};\frac{27+4\sqrt{66}}{9}\right]}$

38. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2011*)

$$\sqrt{x-x^2+2}+x^2 > 4-5|x-2|.$$

$\boxed{[-1;2)}$

39. (*«Ломоносов», 2005*)

$$x\left(3x+2-2\sqrt{3-2x-x^2}\right) \geqslant 3|x|$$

$\boxed{\left[-3;\frac{8\sqrt{3}-19}{13}\right]\cup\{0\}\cup\left[\frac{11}{13};1\right]}$

40. (*«Ломоносов», 2007*)

$$\frac{\sqrt{8-x}-|2x-1|}{\sqrt{x+7}-|2x-1|} \leqslant 1.$$

$\boxed{[-7; -\frac{3}{4}) \cup [\frac{1}{2}; 2)}$

41. (*«Физтех», 2019, 10*) Найдите все значения переменной x, при каждом из которых оба выражения

$$f(x)=\sqrt{21-x^2-4x} \quad \text{и} \quad g(x)=|x+2|$$

определены, причём $\min(f(x); g(x)) > \frac{x+4}{2}$.

$\boxed{x \in [-7; -\frac{8}{3}) \cup (0; 2)}$

42. (*«Физтех», 2019, 10*) Решите неравенство

$$\frac{\sqrt[3]{\frac{x^2}{2}}-\sqrt[6]{4x^2}}{(x^2-4|x|)^2-8x^2+32|x|-48} \geqslant 0.$$

$\boxed{x \in (-\infty; -6) \cup [-4; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; 4] \cup (6; +\infty)}$

43. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2010*) При каких значения параметра a неравенство

$$\frac{1}{3\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{4-x}}+\left|\frac{1}{3\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{4-x}}\right|+a \leqslant 0$$

имеет единственное решение? Найдите это решение.

$\boxed{a=-\frac{5}{6},\ x=\frac{16}{25}}$