

## Квадратный трёхчлен

1. (МГУ, ДВИ, 2012.1) Найдите многочлен второй степени, если известно, что его корни равны  $-\frac{4}{7}$  и  $\frac{5}{3}$ , а свободный член равен  $-2$ .

$2 - x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{4}{7}$

2. (МГУ, ДВИ, 2013.1) Старший коэффициент квадратного трёхчлена  $f(x)$  равен 2. Один из его корней равен  $\frac{5}{2}$ . Найдите второй корень, если известно, что  $f(0) = 3$ .

$\frac{3}{5}$

3. («Покори Воробьёвы горы!», 2019, 9.4) Парабола проходит через точки с координатами (2019; 2020), (2020; 0) и (2021; 2020). Найдите квадратный трёхчлен  $P(x) = ax^2 + bx + c$ , графиком которого она является. В ответе укажите ординату точки пересечения параболы с осью ординат.

8242408000

4. («Курчатов», 2018, 8.2) Перед Васей лежит стопка из 15 красных, 15 синих и 15 жёлтых карточек. Васе требуется выбрать 15 из всех 45 карточек так, чтобы заработать максимальное количество очков. Очки при этом начисляются следующим образом. За каждую красную карточку Вася получает одно очко. За каждую синюю карточку Вася получает количество очков, равное удвоенному количеству выбранных красных карточек, а за каждую жёлтую карточку Вася получает количество очков, равное утроенному количеству выбранных синих карточек. Какое максимальное количество очков может получить Вася?

89I

5. (ММО, 2014, 8.5) В городе Плоском нет ни одной башни. Для развития туризма жители города собираются построить несколько башен общей высотой в 30 этажей.

Инспектор Высотников, поднимаясь на каждую башню, считает число более низких башен, а потом складывает получившиеся величины. После чего инспектор рекомендует город тем сильнее, чем получившаяся величина больше. Сколько и какой высоты башен надо построить жителям, чтобы получить наилучшую возможную рекомендацию?

6. (Олимпиада Эйлера, финал, 2017.2) График  $y = x + b\sqrt{x} + c$ , где  $c > 0$ , имеет с осью ординат общую точку  $C$ , а ось абсцисс пересекает в точках  $X_1$  и  $X_2$ . Обозначим через  $O$  начало координат. Докажите, что  $\angle CX_1O + \angle CX_2O = 90^\circ$ .

7. («Физтех», 2018, 9.2) Даны две линейные функции  $f(x)$  и  $g(x)$  такие, что графики  $y = f(x)$  и  $y = g(x)$  — параллельные прямые, не параллельные осям координат. Найдите наименьшее значение функции  $(g(x))^2 + f(x)$ , если наименьшее значение функции  $(f(x))^2 + g(x)$  равно  $-6$ .

$\frac{7}{11}$

8. («Физтех», 2018, 10.2, 11.2) Даны две линейные функции  $f(x)$  и  $g(x)$  такие, что графики  $y = f(x)$  и  $y = g(x)$  — параллельные прямые, не параллельные осям координат. Найдите наименьшее значение функции  $(g(x))^2 + 2f(x)$ , если наименьшее значение функции  $(f(x))^2 + 2g(x)$  равно 5.

⌌-

9. («Физтех», 2018, 9.2) Даны две линейные функции  $f(x)$  и  $g(x)$  такие, что графики  $y = f(x)$  и  $y = g(x)$  — параллельные прямые, не параллельные осям координат. Известно, что график функции  $y = (f(x))^2$  касается графика функции  $y = 20g(x)$ . Найдите все значения  $A$  такие, что график функции  $y = (g(x))^2$  касается графика функции  $y = \frac{f(x)}{A}$ .

$\frac{0x}{1} = v$

10. («Физтех», 2018, 10.2, 11.2) Даны две линейные функции  $f(x)$  и  $g(x)$  такие, что графики  $y = f(x)$  и  $y = g(x)$  — параллельные прямые, не параллельные осям координат. Известно, что график функции  $y = (f(x))^2$  касается графика функции  $y = 11g(x)$ . Найдите все значения  $A$  такие, что график функции  $y = (g(x))^2$  касается графика функции  $y = Af(x)$ .

⌌- = v или 0 = v

11. («Физтех», 2017, 9–11.1) Когда к квадратному трёхчлену  $f(x)$  прибавили  $3x^2$ , его наименьшее значение увеличилось на 9, а когда из него вычли  $x^2$ , его наименьшее значение уменьшилось на 9. А как изменится наименьшее значение  $f(x)$ , если к нему прибавить  $x^2$ ?

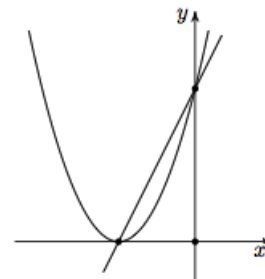
$\frac{x}{6}$  или  $\frac{1}{6}$

12. («Физтех», 2017, 9–11.1) Известно, что для трёх последовательных натуральных значений аргумента квадратичная функция  $f(x)$  принимает значения 13, 13 и 35 соответственно. Найдите наименьшее возможное значение  $f(x)$ .

$\frac{p}{13}$

13. (Всеросс., 2015, МЭ, 9.2) Про коэффициенты  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  двух квадратных трёхчленов  $x^2 + bx + c$  и  $x^2 + ax + d$  известно, что  $0 < a < b < c < d$ . Могут ли эти трёхчлены иметь общий корень?

14. (Всеросс., 2018, МЭ, 9.2) На координатной плоскости построены графики линейной и квадратичной функций (см. рисунок). Уравнение линейной функции имеет вид  $y = cx + 2c$  для некоторого числа  $c$ . Используя тот же параметр  $c$ , запишите уравнение квадратичной функции и объясните свое решение.



15. (ММО, 2014, 9.1) Все коэффициенты квадратного трёхчлена — нечётные целые числа. Докажите, что у него нет корней вида  $1/n$ , где  $n$  — натуральное число.

16. (ММО, 2005, 9.1) Дискриминанты трёх приведённых квадратных трёхчленов равны 1, 4 и 9. Докажите, что можно выбрать по одному корню каждого из них так, чтобы их сумма равнялась сумме оставшихся корней.

17. (ММО, 2007, 9.2) На параболе  $y = x^2$  выбраны четыре точки  $A, B, C, D$  так, что прямые  $AB$  и  $CD$  пересекаются на оси ординат. Найдите абсциссу точки  $D$ , если абсциссы точек  $A, B$  и  $C$  равны  $a, b$  и  $c$  соответственно.

18. (Всеросс., 2019, РЭ, 9.1) Два приведённых квадратных трёхчлена  $f(x)$  и  $g(x)$  таковы, что каждый из них имеет по два корня, и выполняются равенства  $f(1) = g(2)$  и  $g(1) = f(2)$ . Найдите сумму всех четырёх корней этих трёхчленов.

9

19. (Всеросс., 2016, РЭ, 9.1, 10.1) Даны квадратные трёхчлены  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_{100}(x)$  с одинаковыми коэффициентами при  $x^2$ , одинаковыми коэффициентами при  $x$ , но различными свободными членами; у каждого из них есть по два корня. У каждого трёхчлена  $f_i(x)$  выбрали один корень и обозначили его через  $x_i$ . Какие значения может принимать сумма

$$f_2(x_1) + f_3(x_2) + \dots + f_{100}(x_{99}) + f_1(x_{100})?$$

20. (Всеросс., 2000, ОЭ, 9.1) Миша решил уравнение  $x^2 + ax + b = 0$  и сообщил Диме набор из четырёх чисел — два корня и два коэффициента этого уравнения (но не сказал, какие именно из них корни, а какие — коэффициенты). Сможет ли Дима узнать, какое уравнение решал Миша, если все числа набора оказались различными?

21. (Всеросс., 1996, ОЭ, 9.1) Найдите все пары квадратных трёхчленов  $x^2 + ax + b, x^2 + cx + d$  такие, что  $a$  и  $b$  — корни второго трёхчлена,  $c$  и  $d$  — корни первого.

22. (Всеросс., 1998, ОЭ, 9.1) Корни двух приведённых квадратных трёхчленов — отрицательные целые числа, причем один из этих корней — общий. Могут ли значения этих трёхчленов в некоторой положительной целой точке равняться 19 и 98?

23. (Всеросс., 1993, ОЭ, 9.1) Докажите, что для любых действительных чисел  $a$  и  $b$  справедливо неравенство

$$a^2 + ab + b^2 \geq 3(a + b - 1).$$

24. (Всеросс., 2002, ОЭ, 9.2) Приведённый квадратный трёхчлен с целыми коэффициентами в трёх последовательных целых точках принимает простые значения. Докажите, что он принимает простое значение по крайней мере ещё в одной целой точке.

25. (Всеросс., 2001, ОЭ, 9.2) Петя и Коля играют в следующую игру: они по очереди изменяют один из коэффициентов  $a$  или  $b$  квадратного трёхчлена  $x^2 + ax + b$ : Петя на 1, Коля — на 1 или на 3. Коля выигрывает, если после хода одного из игроков получается трёхчлен, имеющий целые корни. Верно ли, что Коля может выиграть при любых начальных целых коэффициентах  $a$  и  $b$  независимо от игры Пети?

26. (Всеросс., 1998, финал, 9.1) Угол, образованный лучами  $y = x$  и  $y = 2x$  при  $x \geq 0$ , отсекает на параболе  $y = x^2 + px + q$  две дуги. Эти дуги спроектированы на ось  $Ox$ . Докажите, что проекция левой дуги на 1 короче проекции правой.

27. (Всеросс., 2015, финал, 9.1) Числа  $a$  и  $b$  таковы, что каждый из двух квадратных трёхчленов  $x^2 + ax + b$  и  $x^2 + bx + a$  имеет по два различных корня, а произведение этих трёхчленов имеет ровно три различных корня. Найдите все возможные значения суммы этих трёх корней.

28. (Всеросс., 2000, финал, 9.1) Различные числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  таковы, что уравнения  $x^2 + ax + 1 = 0$  и  $x^2 + bx + c = 0$  имеют общий действительный корень. Кроме того, общий действительный корень имеют уравнения  $x^2 + x + a = 0$  и  $x^2 + cx + b = 0$ . Найдите сумму  $a + b + c$ .

29. (Всеросс., 1997, финал, 9.5) Существуют ли такие действительные числа  $b$  и  $c$ , что каждое из уравнений  $x^2 + bx + c = 0$  и  $2x^2 + (b + 1)x + c + 1 = 0$  имеет по два целых корня?

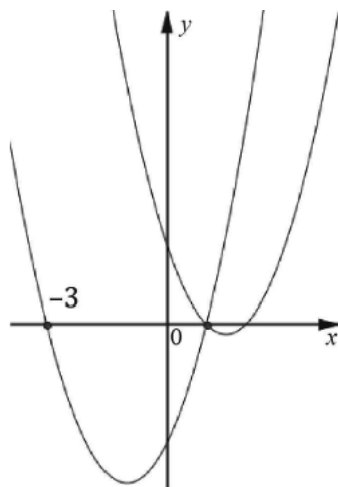
30. (Всеросс., 2017, финал, 9.6) Верно ли, что для любых трёх различных натуральных чисел  $a$ ,  $b$  и  $c$  найдётся квадратный трёхчлен с целыми коэффициентами и положительным старшим коэффициентом, принимающий в некоторых целых точках значения  $a^3$ ,  $b^3$  и  $c^3$ ?

31. (Турнир городов, 2017, 8–9) Докажите, что на графике любого квадратного трёхчлена со старшим коэффициентом 1, имеющего ровно один корень, найдётся такая точка  $(p, q)$ , что трёхчлен  $x^2 + px + q$  также имеет ровно один корень.

32. (Всеросс., 2020, ШЭ, 10.6) Даны квадратные трёхчлены  $x^2 + ax + b$ ,  $x^2 + cx + d$  и  $x^2 + ex + f$ . Оказалось, что любые два из них имеют общий корень, но все три общего корня не имеют. Докажите, что выполнены ровно два неравенства из следующих трёх:

$$\begin{aligned} \frac{a^2 + c^2 - e^2}{4} &> b + d - f, \\ \frac{c^2 + e^2 - a^2}{4} &> d + f - b, \\ \frac{e^2 + a^2 - c^2}{4} &> f + b - d. \end{aligned}$$

33. (Всеросс., 2017, ШЭ, 10.4) На координатной плоскости изображены графики функций  $y = x^2 + bx + c$  и  $y = x^2 + cx + b$ . Найдите значения  $b$  и  $c$ . В ответе запишите уравнения каждой из функций.



34. (Всеросс., 2017, МЭ, 10.1) На листе бумаги построили параболу — график функции  $y = ax^2 + bx + c$  при  $a > 0$ ,  $b > 0$  и  $c < 0$ , — а оси координат стёрли. Как они могли располагаться? (Изобразите любой пример, соответствующий указанным знакам коэффициентов, не изменяя положения самой параболы.)



35. (Всеросс., 2019, МЭ, 10.1) График квадратичной функции  $y = ax^2 + c$  пересекает оси координат в вершинах правильного треугольника. Чему равно  $ac$ ?

□

36. (Всеросс., 2018, МЭ, 10.2) Существуют ли такие попарно различные числа  $a$ ,  $b$  и  $c$ , что число  $a$  является корнем квадратного трёхчлена  $x^2 - 2bx + c^2$ , число  $b$  является корнем квадратного трёхчлена  $x^2 - 2cx + a^2$ , а число  $c$  является корнем квадратного трёхчлена  $x^2 - 2ax + b^2$ ?

37. (Всеросс., 2014, МЭ, 10.2) Корни квадратного трёхчлена  $f(x) = x^2 + ax + b$  равны  $m_1$  и  $m_2$ , а корни квадратного трёхчлена  $g(x) = x^2 + px + q$  равны  $k_1$  и  $k_2$ . Докажите, что  $f(k_1) + f(k_2) + g(m_1) + g(m_2) \geq 0$ .

38. (Всеросс., 2016, МЭ, 10.4) Даны три квадратных трёхчлена:  $x^2 + b_1x + c_1$ ,  $x^2 + b_2x + c_2$  и  $x^2 + \frac{b_1+b_2}{2}x + \frac{c_1+c_2}{2}$ . Известно, что их сумма имеет корни (возможно, два совпадающих). Докажите, что хотя бы у двух из этих трёхчленов также есть корни (возможно, два совпадающих).

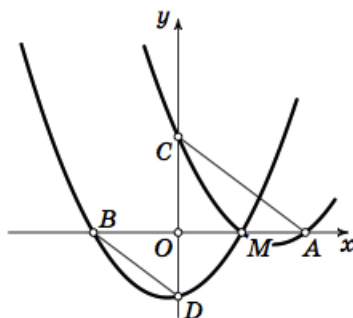
39. (ММО, 2020, 10.1) Приведите пример такого квадратного трёхчлена  $P(x)$ , что при любом  $x$  справедливо равенство

$$P(x) + P(x+1) + \dots + P(x+10) = x^2.$$

40. (ММО, 2017, 10.1) Квадратный трёхчлен  $x^2 + bx + c$  имеет два действительных корня. Каждый из трёх его коэффициентов (включая коэффициент при  $x^2$ ) увеличили на 1. Могло ли оказаться, что оба корня трёхчлена также увеличились на 1?

41. (ММО, 2014, 10.1, 11.1) Квадратный трёхчлен  $f(x) = ax^2 + bx + c$  принимает в точках  $1/a$  и  $c$  значения разных знаков. Докажите, что корни трёхчлена  $f(x)$  имеют разные знаки.

42. (ММО, 2013, 10.1) Даны два квадратных трёхчлена со старшим коэффициентом 1. График одного из них пересекает ось  $Ox$  в точках  $A$  и  $M$ , а ось  $Oy$  — в точке  $C$ . График другого пересекает ось  $Ox$  в точках  $B$  и  $M$ , а ось  $Oy$  — в точке  $D$ . (Здесь  $O$  — начало координат; точки расположены как на рисунке.) Докажите, что треугольники  $AOC$  и  $BOD$  подобны.



**43.** (ММО, 2012, 10.1, 11.1) Алёша написал на доске 5 целых чисел — коэффициенты и корни квадратного трёхчлена. Боря стёр одно из них. Остались числа 2, 3, 4,  $-5$  в каком-то порядке. Восстановите стёртое число и докажите, что было написано именно оно.

**44.** (ММО, 2010, 10.1) Известно, что сумма любых двух из трёх квадратных трёхчленов  $x^2 + ax + b$ ,  $x^2 + cx + d$ ,  $x^2 + ex + f$  не имеет корней. Может ли сумма всех этих трёхчленов иметь корни?

**45.** (ММО, 2006, 10.1) Один из двух приведённых квадратных трёхчленов имеет два корня, меньших тысячи, другой — два корня, больших тысячи. Может ли сумма этих трёхчленов иметь один корень, меньший тысячи, а другой — больший тысячи?

**46.** (Всеросс., 2009, РЭ, 10.1) Квадратный трёхчлен  $f(x)$  таков, что многочлен  $(f(x))^3 - f(x)$  имеет ровно три вещественных корня. Найдите ординату вершины графика этого трёхчлена.

**47.** (Всеросс., 2015, РЭ, 10.7) Коэффициенты  $a$ ,  $b$ ,  $c$  квадратного трёхчлена

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

— натуральные числа, сумма которых равна 2000. Паша может изменить любой коэффициент на 1, заплатив 1 рубль. Докажите, что он может получить квадратный трёхчлен, имеющий хотя бы один целый корень, заплатив не более 1050 рублей.

**48.** (Всеросс., 2017, финал, 10.1) На координатной плоскости нарисованы графики двух приведённых квадратных трёхчленов и две непараллельные прямые  $\ell_1$  и  $\ell_2$ . Известно, что отрезки, отсекаемые графиками на  $\ell_1$ , равны, и отрезки, отсекаемые графиками на  $\ell_2$ , также равны. Докажите, что графики трёхчленов совпадают.

**49.** (Всеросс., 2020, ШЭ, 11.1) Параболы  $y = x^2 + ax + b$  и  $y = x^2 + cx + d$  пересекают ось  $Ox$  в точке (2019; 0). Докажите, что если точки их вторичного пересечения с осью  $Ox$  расположены симметрично относительно начала координат, то и точки их пересечения с осью  $Oy$  расположены симметрично относительно начала координат.

**50.** (Всеросс., 2017, ШЭ, 11.4) Существуют ли такие три действительных числа, что если их поставить в одном порядке в качестве коэффициентов квадратного трёхчлена, то он будет иметь два различных положительных корня, а если в другом порядке, то два различных отрицательных корня?

**51.** (Всеросс., 2014, МЭ, 11.3) Для квадратного трёхчлена  $f(x)$  и некоторых действительных чисел  $l$ ,  $t$  и  $v$  выполнены равенства:  $f(l) = t + v$ ,  $f(t) = l + v$ ,  $f(v) = l + t$ . Докажите, что среди чисел  $l$ ,  $t$  и  $v$  есть равные.

**52.** (ММО, 2013, 11.1) Два приведённых квадратных трёхчлена имеют общий корень, а дискриминант их суммы равен сумме их дискриминантов. Докажите, что тогда дискриминант хотя бы одного из этих двух трёхчленов равен нулю.

**53.** (ММО, 2014, 11.1) Существует ли такой квадратный трёхчлен  $f(x) = ax^2 + bx + c$  с целыми коэффициентами и  $a$ , не кратным 2014, что все числа  $f(1)$ ,  $f(2)$ ,  $\dots$ ,  $f(2014)$  имеют различные остатки при делении на 2014?

54. (ММО, 2018, 11.1) Графики квадратного трёхчлена и его производной разбивают координатную плоскость на четыре части. Сколько корней имеет этот квадратный трёхчлен?

55. (Всеросс., 2009, РЭ, 11.1) Квадратный трёхчлен  $f(x)$  таков, что многочлен  $(f(x))^5 - f(x)$  имеет ровно три вещественных корня. Найдите ординату вершины графика этого трёхчлена.

56. (Всеросс., 2015, РЭ, 11.5) Квадратный трёхчлен  $f(x)$  имеет два различных корня. Оказалось, что для любых чисел  $a$  и  $b$  верно неравенство

$$f(a^2 + b^2) \geq f(2ab).$$

Докажите, что хотя бы один из корней этого трёхчлена — отрицательный.

57. (Всеросс., 2019, РЭ, 11.2) Известно, что каждый из трёхчленов  $x^2 + ax + b$  и  $x^2 + ax + b + 1$  имеет хотя бы по одному корню, и все корни этих трёхчленов целые. Докажите, что трёхчлен  $x^2 + ax + b + 2$  корней не имеет.

58. (Всеросс., 2013, РЭ, 11.2)  $P(x)$  и  $Q(x)$  — приведённые квадратные трёхчлены, имеющие по два различных корня. Оказалось, что сумма двух чисел, получаемых при подстановке корней трёхчлена  $P(x)$  в трёхчлен  $Q(x)$ , равна сумме двух чисел, получаемых при подстановке корней трёхчлена  $Q(x)$  в трёхчлен  $P(x)$ . Докажите, что дискриминанты трёхчленов  $P(x)$  и  $Q(x)$  равны.

59. (Всеросс., 2010, РЭ, 11.7) Целые числа  $a, b, c$  таковы, что значения квадратных трёхчленов  $bx^2 + cx + a$  и  $cx^2 + ax + b$  при  $x = 1234$  совпадают. Может ли первый трёхчлен при  $x = 1$  принимать значение 2009?

60. (Всеросс., 2008, ОЭ, 11.1) Даны два квадратных трёхчлена, имеющих корни. Известно, что если в них поменять местами коэффициенты при  $x^2$ , то получатся трёхчлены, не имеющие корней. Докажите, что если в исходных трёхчленах поменять местами коэффициенты при  $x$ , то получатся трёхчлены, имеющие корни.

61. (Всеросс., 2007, ОЭ, 11.2) Квадратные трёхчлены  $f(x)$  и  $g(x)$  таковы, что

$$f'(x)g'(x) \geq |f(x)| + |g(x)|$$

при всех действительных  $x$ . Докажите, что произведение  $f(x)g(x)$  равно квадрату некоторого трёхчлена.

62. (Турнир городов, 2017, 10–11) Две параболы с различными вершинами являются графиками квадратных трёхчленов со старшими коэффициентами  $p$  и  $q$ . Известно, что вершина каждой из парабол лежит на другой параболе. Чему может быть равно  $p + q$ ?

63. (Турнир городов, 2017, 10–11) Графики двух квадратных трёхчленов пересекаются в двух точках. В обеих точках касательные к графикам перпендикулярны. Верно ли, что оси симметрии графиков совпадают?

64. («Высшая проба», 2019, 10–11.5) Рассмотрим всевозможные приведенные квадратные трёхчлены  $x^2 + px + q$  с целыми коэффициентами  $p$  и  $q$ . Назовем областью значений такого трёхчлена множество его значений во всех целых точках  $x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Какое наибольшее количество таких трёхчленов можно выбрать, чтобы их области значений попарно не пересекались?