Системы алгебраических уравнений

Содержание

Если вам встретилась сложная система уравнений, то придётся проявлять изобретательность и отыскивать некий трюк, поскольку никакого единого метода решения таких систем не существует. Необходимым условием успеха в данном случае является большой опыт решения систем уравнений и знание ряда возникающих при этом стандартных ситуаций.

Данная статья посвящена только системам рациональных уравнений (обе части которых суть многочлены или отношения многочленов). Системы иррациональных уравнений будут рассмотрены в статье «Иррациональные уравнения и системы».

1 Двойная замена

Может оказаться, что две переменные входят в систему лишь в составе двух устойчивых выражений. Обозначаем эти выражения новыми буквами!

Задача 1. Решить систему:

$$\begin{cases} x + y + \dfrac{x}{y} = 9, \\ \dfrac{(x+y)x}{y} = 20. \end{cases}$$

Решение. Делаем замену $u = x + y$, $v = \frac{x}{y}$ и приходим к системе

$$\begin{cases} u + v = 9, \\ uv = 20, \end{cases}$$

из которой легко находим $u = 5$, $v = 4$ или $u = 4$, $v = 5$ (здесь и далее подробности в простых ситуациях опускаются). В первом случае получаем систему

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ \dfrac{x}{y} = 4, \end{cases}$$

решением которой служит пара $x = 4$, $y = 1$. Во втором случае имеем систему

$$\begin{cases} x + y = 4, \\ \dfrac{x}{y} = 5, \end{cases}$$

из которой $x = \frac{10}{3}$, $y = \frac{2}{3}$.
Ответ: $(4, 1)$; $\left(\frac{10}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Задача 2. (*МФТИ, 2007*) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} xy + 2x - 3y + 2 = 0, \\ 2x^2y - 3xy^2 - 12x + 18y = 16. \end{cases}$$

Решение. Запишем второе уравнение в виде

$$xy(2x - 3y) - 6(2x - 3y) = 16$$

и сделаем двойную замену

$$u = xy, \quad v = 2x - 3y.$$

Система примет вид:

$$\begin{cases} u + v + 2 = 0, \\ uv - 6v = 16. \end{cases}$$

Легко находим: $u = 2$, $v = -4$, что приводит к системе

$$\begin{cases} xy = 2, \\ 2x - 3y = -4. \end{cases}$$

Эта система также не представляет сложностей. Её решения: $x = 1$, $y = 2$ или $x = -3$, $y = -\frac{2}{3}$.
Ответ: $(1, 2)$; $\left(-3, -\frac{2}{3}\right)$.

2 Симметрические системы

Функция $f(x, y)$ двух переменных x и y называется *симметрической*, если $f(y, x) = f(x, y)$; иными словами, симметрическая функция переходит сама в себя при одновременной замене x на y и y на x. Например, $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$ — симметрическая функция, а $g(x, y) = x^3 + y$ симметрической не является, поскольку $g(y, x) = y^3 + x \neq g(x, y)$.

Система

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

называется *симметрической*, если $f(x, y)$ и $g(x, y)$ — симметрические многочлены. В симметрических системах отлично работает двойная замена

$$u = x + y, \quad v = xy. \tag{1}$$

Задача 3. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2010*) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2y + xy^2 = 2 - 2x - 2y, \\ x + y + 5 = -xy. \end{cases}$$

Решение. Имеем:

$$\begin{cases} xy(x + y) + 2(x + y) = 2, \\ x + y + xy = -5, \end{cases}$$

или, делая замену (1),

$$\begin{cases} uv + 2u = 2, \\ u + v = -5. \end{cases}$$

Из второго уравнения выражаем $v = -u - 5$ и подставляем это в первое уравнение; после преобразований получим

$$u^2 + 3u + 2 = 0; \quad u_1 = -1, \; u_2 = -2.$$

Соответственно, $v_1 = -4$, $v_2 = -3$, так что исходная система равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x + y = -1, \\ xy = -4 \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} x + y = -2, \\ xy = -3. \end{cases}$$

Обе они решаются элементарно.

Ответ: $\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}, \frac{-1-\sqrt{17}}{2}\right)$; $\left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2}, \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)$; $(1, -3)$; $(-3, 1)$.

Оказывается, что любой симметрический многочлен двух переменных x, y можно записать как многочлен двух переменных u, v. Это теорема, которую мы не будем доказывать; нам важно уметь выражать через u и v многочлены $x^2 + y^2$, $x^3 + y^3$ и $x^4 + y^4$.

Имеем:

$$u^2 = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + y^2 + 2v,$$

откуда

$$x^2 + y^2 = u^2 - 2v.$$

Далее,

$$u^3 = (x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y) = x^3 + y^3 + 3uv,$$

откуда

$$x^3 + y^3 = u^3 - 3uv.$$

Наконец,

$$\begin{aligned} u^4 = (x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 = \\ = x^4 + y^4 + 4xy(x^2 + y^2) + 6x^2y^2 = x^4 + y^4 + 4v(u^2 - 2v) + 6v^2, \end{aligned}$$

откуда

$$x^4 + y^4 = u^4 - 4u^2v + 2v^2.$$

Задача 4. Решить систему

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 19, \\ (xy + 8)(x + y) = 2. \end{cases}$$

Решение. Легко видеть, что эта система является симметрической. Делая замену $u = x + y$, $v = xy$, получим систему

$$\begin{cases} u^3 - 3uv = 19, \\ u(v + 8) = 2. \end{cases}$$

Из второго уравнения выражаем $uv = 2 - 8u$ и подставляем в первое уравнение:

$$u^3 - 3(2 - 8u) = 19 \quad \Leftrightarrow \quad u^3 + 24u - 25 = 0.$$

Очевиден корень $u = 1$, что позволяет разложить левую часть на множители:

$$(u-1)(u^2+u+25)=0 \quad \Leftrightarrow \quad u=1.$$

Далее находим $v = -6$ и приходим к системе

$$\begin{cases} x+y=1, \\ xy=-6, \end{cases}$$

откуда $x = 3$, $y = -2$ или наоборот, $x = -2$, $y = 3$.

Ответ: $(3, -2)$; $(-2, 3)$.

Обратите внимание, что у симметрической системы и ответ симметричен: если пара (x_0, y_0) является решением, то и пара (y_0, x_0) — тоже решение.

3 Сложение уравнений

Одно из уравнений системы можно заменить на сумму (или разность) её уравнений. В результате получим систему, эквивалентную исходной.

Задача 5. Решить систему

$$\begin{cases} x^3+y^3=7, \\ x^2y+xy^2=-2. \end{cases}$$

Решение. Эту симметрическую систему можно решить общим методом, изложенным выше. Но можно и сразу сложить первое уравнение с утроенным вторым:

$$x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=1 \quad \Leftrightarrow \quad (x+y)^3=1 \quad \Leftrightarrow \quad x+y=1.$$

Отсюда $y = 1 - x$; подставляем это в первое уравнение системы:

$$x^3-(x-1)^3=7 \quad \Leftrightarrow \quad x^3-(x^3-3x^2+3x-1)=7 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-x-2=0.$$

Дальше ясно.

Ответ: $(-1, 2)$; $(2, -1)$

Задача 6. (*МГУ, филологич. ф-т, 2007*) Решите систему

$$\begin{cases} 2x^2-x-3y=0, \\ 2y^2+y+3x=0. \end{cases} \tag{2}$$

Решение. Вычитаем из первого уравнения второе:

$$0=2(x^2-y^2)-4(x+y)=2(x+y)(x-y-2).$$

Если $y = -x$, то первое уравнение системы (2) даёт $2x^2 + 2x = 0$, откуда $x = 0$ (и тогда $y = 0$) или $x = -1$ (и тогда $y = 1$).

Если же $y = x - 2$, то первое уравнение (2) приводит к уравнению $x^2 - 2x + 3 = 0$, которое не имеет корней.

Ответ: $(0, 0)$; $(-1, 1)$.

4 Однородные системы

Функция $f(x, y)$ двух переменных x и y называется *однородным многочленом второй степени*, если она имеет вид

$$f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

(с очевидным дополнительным условием, что не все коэффициенты a, b и c равны нулю). Аналогично определяются однородные многочлены более высоких степеней; например, однородный многочлен третьей степени имеет вид

$$f(x,y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3.$$

Однородная система (второй степени) — это система вида

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1, \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = d_2, \end{cases} \tag{3}$$

где d_1 и d_2 — некоторые числа. Если оба они не равны нулю, то, умножая уравнения (3) на подходящие множители (например, на d_2 и d_1 соответственно) и вычитая их друг из друга, мы получим однородный многочлен, равный нулю.

Задача 7. Решить систему

$$\begin{cases} 3x^2 + 5xy - 2y^2 = 20, \\ x^2 + xy + y^2 = 7. \end{cases}$$

Решение. Умножим первое уравнение на 7, а второе — на 20:

$$\begin{cases} 21x^2 + 35xy - 14y^2 = 140, \\ 20x^2 + 20xy + 20y^2 = 140. \end{cases}$$

Вычитаем из первого уравнения второе:

$$x^2 + 15xy - 34y^2 = 0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно x (с параметром y), находим $x = 2y$ или $x = -17y$. Остаётся подставить это в любое уравнение исходной системы (проще во второе) и довести задачу до ответа. Сделайте это самостоятельно.

Ответ: $(2, 1)$; $(-2, -1)$; $\left(-\frac{17}{\sqrt{39}}, \frac{1}{\sqrt{39}}\right)$; $\left(\frac{17}{\sqrt{39}}, -\frac{1}{\sqrt{39}}\right)$

Задача 8. (*«Физтех», 2012*) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{6x}{y} + \dfrac{2y}{x} - 5 = 4xy, \\ \dfrac{7x}{y} + \dfrac{4y}{x} - 10 = 3xy. \end{cases}$$

Решение. Формально это не совсем система вида (3), то принцип действия тот же. Умножим первое уравнение на 3, второе на 4, после чего вычтем из первого второе:

$$-\frac{10x}{y} - \frac{10y}{x} + 25 = 0.$$

Теперь делаем замену $t = \frac{x}{y}$:

$$2t + \frac{2}{t} - 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2t^2 - 5t + 2}{t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 2 \text{ или } t = \frac{1}{2}\,.$$

При $t = 2$ имеем $x = 2y$; первое уравнение даёт тогда $8y^2 = 8$, $y = \pm 1$, откуда $x = \pm 2$ (знак x совпадает со знаком y). Аналогично рассматривается случай $t = \frac{1}{2}$.

Ответ: $(2, 1)$; $(-2, -1)$; $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$; $\left(-\frac{1}{2}; -1\right)$.

5 Умножение и деление уравнений

Под умножением уравнений $A = B$ и $C = D$ мы понимаем переход к уравнению $AC = BD$, а под делением — переход к уравнению $A/C = B/D$. В последнем случае необходимо проследить за тем, чтобы не получить нуль в знаменателе.

Задача 9. Решить систему

$$\begin{cases} x^2y^3 = 16, \\ x^3y^2 = 2. \end{cases}$$

Решение. Ясно, что $x \neq 0$ и $y \neq 0$. Делим первое уравнение на второе:

$$\frac{y}{x} = 8 \quad \Leftrightarrow \quad y = 8x.$$

Подставим это во второе уравнение:

$$x^3 \cdot 64x^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^5 = \frac{1}{32} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}\,.$$

Теперь находим $y = 4$.

Ответ: $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$.

Задача 10. (*МФТИ, 2006*) Найти действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} 5\sqrt[3]{x^5y^2} = 4(x^2 + y^2), \\ 3\sqrt[3]{xy^4} = x^2 - y^2. \end{cases}$$

Решение. Формально мы имеем дело с иррациональными уравнениями, которые будут рассматриваться в одной из следующих статей. Однако никакой специфики иррациональных уравнений тут на самом деле нет.

Отметим сразу же, что если одна из переменных равна нулю, то и вторая равна нулю. Пара $(0, 0)$ является решением системы, а остальные решения ищем в предоложении $x \neq 0$ и $y \neq 0$.

Перемножаем наши уравнения:

$$15x^2y^2 = 4(x^4 - y^4) \quad \Leftrightarrow \quad 4x^4 - 15x^2y^2 - 4y^4 = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad (x^2 - 4y^2)(4x^2 + y^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 4y^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 2y.$$

Если $x = 2y$, то второе уравнение даёт:

$$3\sqrt[3]{2y^5} = 3y^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2y^5 = y^6 \quad \Leftrightarrow \quad y = 2,$$

и тогда $x = 4$. Аналогично, если $x = -2y$, то $y = -2$ и $x = 4$.

Ответ: $(0,0)$; $(4,2)$; $(4,-2)$.

В наиболее сложных случаях перед умножением или делением уравнений нужно ещё основательно поработать.

Задача 11. (*МФТИ, 2006*) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{x^2}(2+x) = 4y - 3x, \\ 2y^2 - 3xy = 4y - x^2. \end{cases}$$

Решение. Умножаем первое уравнение на x^2 (ограничение $x \neq 0$ будет учтено позже):

$$\begin{cases} 2y^2 + xy^2 = 4x^2y - 3x^3, \\ 2y^2 - 3xy = 4y - x^2. \end{cases}$$

Теперь наступает самый трудный момент: нужно разглядеть «хорошие» квадратные трёхчлены $t^2-4t+3 = (t-1)(t-3)$ и $t^2-3t+2 = (t-1)(t-2)$ с общим множителем $t-1$. Перепишем систему следующим образом:

$$\begin{cases} x(y^2 - 4xy + 3x^2) = -2y^2, \\ x^2 - 3xy + 2y^2 = 4y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x(y-x)(y-3x) = -2y^2, \\ (x-y)(x-2y) = 4y. \end{cases}$$

Легко видеть, что обе части второго уравнения не могут обращаться в нуль (предполагая обратное, в каждом случае приходим к равенству $x = 0$ вопреки ограничению). Делим первое уравнение на второе:

$$\frac{x(y-3x)}{x-2y} = \frac{y}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2y^2 + xy - 6x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (y+2x)(2y-3x) = 0.$$

Отсюда имеем $y = -2x$ или $y = \frac{3}{2}x$. Остаётся подставить это во второе (так проще) уравнение исходной системы и после элементарных вычислений получить ответ.

Ответ: $\left(-\frac{8}{15}, \frac{16}{15}\right)$; $(6,9)$.

6 Упрощение одного из уравнений

В отдельных случаях одно из уравнений системы удаётся привести к виду $AB = 0$, где A и B — некоторые (несложные) выражения, зависящие от переменных.

Задача 12. (*МФТИ, 1999*) Найти все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^9 - x^8 - 2y^2 = 0, \\ x^7 + \dfrac{y^3}{x^4} = y^2 + yx^3. \end{cases}$$

Решение. Первое уравнение ничего хорошего нам не сулит, поэтому возьмёмся за второе. Помня об ограничении $x \neq 0$, умножаем его на x^4:

$$x^{11} + y^3 = x^4y^2 + x^7y \quad \Leftrightarrow \quad x^7(x^4 - y) - y^2(x^4 - y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x^7 - y^2)(x^4 - y) = 0.$$

Отсюда имеем $y^2 = x^7$ или $y = x^4$.

Пусть сначала $y^2 = x^7$. Подставляем это в первое уравнение:

$$x^9 - x^8 - 2x^7 = 0,$$

что при ограничении $x \neq 0$ равносильно квадратному уравнению

$$x^2 - x - 2 = 0$$

с корнями -1 и 2. Корню $x = -1$ не соответствует никакое значение y (ибо $y^2 = -1$), а для корня $x = 2$ получаем $y^2 = 2^7$, то есть $y = \pm 8\sqrt{2}$.

Пусть теперь $y = x^4$. Подставляем в первое уравнение:

$$x^9 - 3x^8 = 0,$$

откуда с учётом ограничения $x \neq 0$ имеем $x = 3$ и соответственно $y = 81$.

Ответ: $\left(2, 8\sqrt{2}\right)$; $\left(2, -8\sqrt{2}\right)$; $(3, 81)$.

Может случиться, что уравнение, воспринимаемое как квадратное относительно одной из переменных, имеет «хороший» дискриминант.

Задача 13. (*МФТИ, 2008*) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 + 5x - 9y + 4 = 0, \\ x^2 - y^2 - 5 = 0. \end{cases}$$

Решение. Второе уравнение имеет довольно простой вид, и вместе с тем ничего полезного из него не извлечёшь. Поэтому работать надо с первым уравнением. Запишем его как квадратное относительно x (с параметром y):

$$x^2 + (5 - 3y)x + 2y^2 - 9y + 4 = 0.$$

Дискриминант:

$$D = (5 - 3y)^2 - 4(2y^2 - 9y + 4) = y^2 + 6y + 9 = (y + 3)^2,$$

откуда

$$x = \frac{3y - 5 + (y + 3)}{2} = 2y - 1 \quad \text{или} \quad x = \frac{3y - 5 - (y + 3)}{2} = y - 4.$$

Остаётся сделать эти подстановки во второе уравнение. Несложные технические детали описывать не будем — вы легко сможете довести решение до конца самостоятельно.

Ответ: $(3, 2)$; $\left(-\frac{7}{3}, -\frac{2}{3}\right)$; $\left(-\frac{21}{8}, \frac{11}{8}\right)$.

7 Системы с тремя неизвестными

Системы трёх уравнений с тремя неизвестными решаются теми же методами, которые были изложены выше. Разумеется, задачи в целом становятся сложнее.

Задача 14. (*ОММО, 2012*) Решите систему

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{x + y} = 1, \\ \dfrac{yz}{y + z} = 2, \\ \dfrac{xz}{x + z} = 3. \end{cases}$$

Решение. Запишем уравнения в следующем виде:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{xy} = 1, \\ \dfrac{y+z}{yz} = \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{x+z}{xz} = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1, \\ \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Теперь делаем замену $u = 1/x$, $v = 1/y$, $w = 1/z$ и приходим к системе

$$\begin{cases} u + v = 1, \\ v + w = \dfrac{1}{2}, \\ u + w = \dfrac{1}{3}, \end{cases}$$

которая решается элементарно: $u = \frac{5}{12}$, $v = \frac{7}{12}$, $w = -\frac{1}{12}$. Отсюда легко получаем ответ.

Ответ: $\left(\frac{12}{5}, \frac{12}{7}, -12\right)$.

Задача 15. (*МФТИ, 2002*) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^3 - y^3 - 2z^3 + xyz + 5 = 0, \\ y^3 + 2z^3 - x^3 - 2xyz - 2 = 0, \\ x^3 - y^3 - z^3 + xyz + 4 = 0. \end{cases}$$

Решение. Сложим первое уравнение со вторым:

$$x^3 - xyz + 3 = 0. \tag{4}$$

Вычтем из первого уравнения исходной системы удвоенное третье:

$$y^3 - xyz - 3 = 0. \tag{5}$$

Наконец, сложим второе уравнение исходной системы с третьим:

$$z^3 - xyz + 2 = 0. \tag{6}$$

Исходная система равносильна системе уравнений (4)–(6):

$$\begin{cases} x^3 = xyz - 3, \\ y^3 = xyz + 3, \\ z^3 = xyz - 2. \end{cases} \tag{7}$$

Перемножим уравнения этой системы и сделаем замену $t = xyz$:

$$t^3 = (t-3)(t+3)(t-2) \quad \Leftrightarrow \quad 2t^2 + 9t - 18 = 0.$$

Отсюда $t = -6$ или $t = \frac{3}{2}$. Остаётся подставить эти значения в систему (7) и найти x, y, z.

Ответ: $(-\sqrt[3]{9}, -\sqrt[3]{3}, -2)$; $\left(-\sqrt[3]{\frac{3}{2}}, \sqrt[3]{\frac{9}{2}}, -\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)$.

Задача 16. (*МФТИ, 2004*) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (3y-x)^2 = 2+z^2, \\ (3y+z)^2 = 3+x^2, \\ (z-x)^2 = 4+9y^2. \end{cases} \tag{8}$$

Решение. Здесь дело идёт к делению уравнений. Перепишем систему следующим образом:

$$\begin{cases} (x-3y)^2 - z^2 = 2, \\ x^2 - (3y+z)^2 = -3, \\ (x-z)^2 - 9y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3y+z)(x-3y-z) = 2, \\ (x-3y-z)(x+3y+z) = -3, \\ (x+3y-z)(x-3y-z) = 4. \end{cases} \tag{9}$$

Левые части наших уравнений не равны нулю. Делим первое уравнение системы (9) на второе:

$$\frac{x-3y+z}{x+3y+z} = -\frac{2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 5x-3y+5z=0. \tag{10}$$

Делим третье уравнение системы (9) на первое:

$$\frac{x+3y-z}{x-3y+z} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x-9y+3z=0. \tag{11}$$

Исходная система (8) равносильна системе, составленной из первого уравнения (8) и уравнений (10) и (11):

$$\begin{cases} (3y-x)^2 = 2+z^2, \\ 5x-3y+5z=0, \\ x-9y+3z=0. \end{cases} \tag{12}$$

Из третьего уравнения системы (12) имеем $x = 9y-3z$; подставим это во второе уравнение и найдём $y = \frac{5}{21}z$, откуда $x = 9\cdot\frac{5}{21}z - 3z = -\frac{6}{7}z$. Полученные выражения x и y через z подставляем в первое уравнение (12) и в результате находим $z = \pm\frac{7}{6}$, после чего определяем соответствующие значения x и y.

Ответ: $\left(-1, \frac{5}{18}, \frac{7}{6}\right)$; $\left(1, -\frac{5}{18}, -\frac{7}{6}\right)$.

Задача 17. (*«Физтех», 2009*) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (y-x)(x^2+y^2) = 15, \\ (y+z)(y^2+z^2) = -13, \\ (z-x)(x^2+z^2) = -20. \end{cases} \tag{13}$$

Решение. Мы хотим домножить каждое из уравнений на соответствующий множитель так, чтобы получить в левых частях разности четвёртых степеней. Однако равносильность такого преобразования требует обоснования.

Пусть $y+x=0$, то есть $y=-x$. Тогда второе уравнение системы (13) примет вид

$$(z-x)(x^2+z^2) = -13;$$

сопоставляя это с третьим уравнением (13), мы видим, что система (13) не будет иметь решений. Таким образом, ни одна тройка чисел (x,y,z), для которой выполнено $y+x=0$, не является решением системы (13); иными словами, умножив первое уравнение на $y+x$, мы получим систему, равносильную исходной.

Точно так же показывается, что ни одна тройка (x, y, z), для которой выполнено $z - y = 0$ или $x + z = 0$, не является решением системы (13). Умножая первое уравнение нашей системы на $y + x$, второе — на $z - y$, третье — на $x + z$, придём к равносильной системе

$$\begin{cases} y^4 - x^4 = 15(y + x), \\ z^4 - y^4 = 13(y - z), \\ x^4 - z^4 = 20(x + z). \end{cases}$$

Сложим эти три уравнения: $0 = 28y + 35x + 7z$, откуда $z = -5x - 4y$. Подставляя это в третье уравнение (13) и присоединяя первое уравнение (13), получим систему двух уравнений относительно x и y:

$$\begin{cases} (y - x)(x^2 + y^2) = 15, \\ (-6x - 4y)\left(x^2 + (5x + 4y)^2\right) = -20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - x^2y + xy^2 - y^3 = -15, \\ 39x^3 + 86x^2y + 64xy^2 + 16y^3 = 5. \end{cases}$$

Получилась однородная система третьей степени. Мы уже знаем, что нужно делать: умножаем второе уравнение на 3 и складываем с первым уравнением:

$$118x^3 + 257x^2y + 193xy^2 + 47y^3 = 0. \tag{14}$$

Если $x = 0$, то в силу этого уравнения и $y = 0$ вопреки первому уравнению системы (13). Поэтому делим уравнение (14) на $x^3 \neq 0$ и обозначаем $t = \frac{y}{x}$:

$$47t^3 + 193t^2 + 257t + 118 = 0. \tag{15}$$

Это, конечно, «жесть», но что поделаешь? Остаётся уповать лишь на то, что подберётся «маленький» корень. Ясно, что положительных корней уравнение (15) не имеет, поэтому начинаем с «маленьких» отрицательных. И действительно, $t = -2$ является корнем! Имеем:

$$(47t^3 + 94t^2) + (99t^2 + 198t) + (59t + 118) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (t + 2)(47t^2 + 99t + 59) = 0.$$

Дискриминант уравнения $47t^2 + 99t + 59 = 0$ отрицателен, поэтому уравнение (15) имеет лишь один корень $t = -2$. Отсюда $y = -2x$, и теперь закончить решение труда не составляет.

Ответ: $(-1, 2, -3)$.

8 Задачи

Во всех задачах требуется решить систему уравнений.

1. $$\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{13}{6}, \\ x + y = 5. \end{cases}$$

$\boxed{(2, 3);\ (3, 2)}$

2. $$\begin{cases} \dfrac{x + y}{x - y} + \dfrac{x - y}{x + y} = \dfrac{13}{6}, \\ xy = 5. \end{cases}$$

$\boxed{(5, 1);\ (-5, -1)}$

3. $$\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{x^3}{y^3} = 14, \\ x + y = 3. \end{cases}$$

$\boxed{(2, 1)}$

4. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 5, \\ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 13. \end{cases}$

$\boxed{\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right);\ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)}$

5. $\begin{cases} \dfrac{2}{x} + \dfrac{y}{3} = 3, \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{y} = \dfrac{3}{2}\,. \end{cases}$

$\boxed{(2, 6);\ (1, 3)}$

6. $\begin{cases} x + y + \dfrac{x^2}{y^2} = 7, \\ \dfrac{(x+y)x^2}{y^2} = 12. \end{cases}$

$\boxed{(2, 1);\ (6, -3);\ \left(6 + 2\sqrt{3}, -2 - 2\sqrt{3}\right);\ \left(6 - 2\sqrt{3}, -2 + 2\sqrt{3}\right)}$

7. $\begin{cases} \dfrac{3}{x^2 + y^2 - 1} + \dfrac{2y}{x} = 1, \\ x^2 + y^2 + \dfrac{4x}{y} = 22. \end{cases}$

$\boxed{(3, 1);\ (-3, -1);\ \left(\frac{4\sqrt{106}}{53}, \frac{4\sqrt{106}}{53}\right);\ \left(-\frac{4\sqrt{106}}{53}, -\frac{4\sqrt{106}}{53}\right)}$

8. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{x^3}{y^3} = 12, \\ x^2y^2 + xy = 6. \end{cases}$

$\boxed{(2, 1);\ (-2, -1)}$

9. $\begin{cases} xy - \dfrac{x}{y} = \dfrac{16}{3}\,, \\ xy - \dfrac{y}{x} = \dfrac{9}{2}\,. \end{cases}$

$\boxed{(2, 3);\ (-2, -3)}$

10. (*МГУ, экономич. ф-т, 2002*)

$$\begin{cases} y - xy - x = 11, \\ xy^2 - x^2y = -30. \end{cases}$$

$\boxed{(-2, 3);\ (-3, 2);\ (-1, 5);\ (-5, 1)}$

11. (*МГУ, геологич. ф-т, 1998*)

$$\begin{cases} x(1 + y) = y + 7, \\ x^2y - xy^2 = 6. \end{cases}$$

$\boxed{(3, 2);\ (-2, -3);\ \left(3 + \sqrt{10}, -3 + \sqrt{10}\right);\ \left(3 - \sqrt{10}, -3 - \sqrt{10}\right)}$

12. (*МГУ, физический ф-т, 2003*)

$$\begin{cases} \dfrac{17}{2x^2+3y} + \dfrac{12}{3x^2-2y} = 3, \\ \dfrac{6}{3x^2-2y} + \dfrac{34}{2x^2+3y} = 3. \end{cases}$$

$\boxed{(-2,3);\ (2,3)}$

13. (*МФТИ, 2007*)

$$\begin{cases} 2xy + 4x + 3y = 2, \\ 4x^2y + 3xy^2 + 12x + 9y = 8. \end{cases}$$

$\boxed{(-\frac{1}{2},2);\ (\frac{3}{2},-\frac{2}{3})}$

14. (*МГУ, ф-т почвоведения, 2007*)

$$\begin{cases} x + y + xy = 7, \\ x^2 + y^2 + xy = 13. \end{cases}$$

$\boxed{(1,3);\ (3,1)}$

15. $\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 - 3x - 3y + xy = -1, \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y + 3xy = 1. \end{cases}$

$\boxed{(1,1)}$

16. $\begin{cases} x^2y + xy^2 = 20, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{4}\,. \end{cases}$

$\boxed{(1,4);\ (4,1);\ \left(\frac{-5-\sqrt{41}}{2}, \frac{-5+\sqrt{41}}{2}\right);\ \left(\frac{-5+\sqrt{41}}{2}, \frac{-5-\sqrt{41}}{2}\right)}$

17. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2010*)

$$\begin{cases} x^2y + x + xy^2 + y + 5 = 0, \\ x + y + xy + 5 = 0. \end{cases}$$

$\boxed{(3,-2);\ (-2,3);\ (0,-5);\ (-5,0)}$

18. (*ОММО, 2016*)

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 19, \\ x^4 + x^2y^2 + y^4 = 931. \end{cases}$$

$\boxed{(3,5);\ (5,3);\ (-3,-5);\ (-5,-3)}$

19. (*МГУ, ДВИ, 2014.6*) Найдите все положительные x, y, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} x^{\frac{3}{2}} + y = 16, \\ x + y^{\frac{2}{3}} = 8. \end{cases}$$

$\boxed{x = 4,\ y = 8}$

20. $\begin{cases} x^3 + y^3 + 2x^2y + 2xy^2 = 21, \\ 2x^3 + 2y^3 + x^2y + xy^2 = 24. \end{cases}$

$\boxed{(1, 2);\ (2, 1)}$

21. $\begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17, \\ x + xy + y = 5. \end{cases}$

$\boxed{(1, 2);\ (2, 1)}$

22. $\begin{cases} x^6 + y^6 = 65, \\ x^4 - x^2y^2 + y^4 = 13. \end{cases}$

$\boxed{(1, 2);\ (2, 1);\ (-1, 2);\ (2, -1);\ (1, -2);\ (-2, 1);\ (-1, -2);\ (-2, -1)}$

23. $\begin{cases} x^4 + y^4 = 17(x + y)^2, \\ xy = 2x + 2y. \end{cases}$

$\boxed{(0, 0);\ (1, -2);\ (-2, 1);\ (3, 6);\ (6, 3)}$

24. $\begin{cases} 10(x^4 + y^4) = -17(x^3y + xy^3), \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$

$\boxed{(-1, 2);\ (2, -1);\ (-2, 1);\ (1, -2)}$

25. $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 3y = 9, \\ 2x^2 + 2y^2 + x - 5y = 1. \end{cases}$

$\boxed{(1, 2);\ \left(-\frac{239}{146}, \frac{117}{146}\right)}$

26. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 19, \\ x^2y + xy^2 = -6. \end{cases}$

$\boxed{(3, -2);\ (-2, 3)}$

27. $\begin{cases} x^3 - y^3 = 65, \\ x^2y - xy^2 = -20. \end{cases}$

$\boxed{(4, -1);\ (1, -4)}$

28. $\begin{cases} x^3 + 3xy^2 = 158, \\ 3x^2y + y^3 = -185. \end{cases}$

$\boxed{(2, -5)}$

29. (*МГУ, филологич. ф-т, 2007*)

$$\begin{cases} x^2 - 2y - 3 = 0, \\ y^2 + 2x - 3 = 0. \end{cases}$$

$\boxed{(1, -1);\ (-3, 3)}$

30. (*МГУ, географич. ф-т, 2002*)

$$\begin{cases} x^3 = 5x + y, \\ y^3 = 5y + x. \end{cases}$$

$\boxed{(0, 0);\ (2, -2);\ (-2, 2);\ \left(\sqrt{6}, \sqrt{6}\right);\ \left(-\sqrt{6}, -\sqrt{6}\right);}$

$\boxed{\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}, \frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}\right);\ \left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}, \frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}\right);\ \left(\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}, \frac{-\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}\right);\ \left(\frac{-\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}, \frac{-\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}\right)}$

31. (*МФТИ, 2008*)

$$\begin{cases} 3x^2 = y^4 + y, \\ 5x = \dfrac{2y}{x} + y^2. \end{cases}$$

$\boxed{\left(2^{-\frac{2}{3}}, 2^{-\frac{1}{3}}\right);\ \left(-2 \cdot 11^{-\frac{2}{3}}, 11^{-\frac{1}{3}}\right)}$

32. (*«Ломоносов», 2016, 10–11*) Даны 2017 уравнений: $x_1 + x_2 = -2016$, $x_2 + x_3 = -2014$, $\ldots$, $x_{1008} + x_{1009} = -2$, $x_{1009} + x_{1010} = 0$, $x_{1010} + x_{1011} = 2$, $x_{1011} + x_{1012} = 4$, $\ldots$, $x_{2016} + x_{2017} = 2014$, $x_{2017} + x_1 = 2016$. Найдите x_{2017}.

$\boxed{2016}$

33. $\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 3, \\ x^2 + 2xy - 2y^2 = 6. \end{cases}$

$\boxed{(2, 1);\ (-2, -1)}$

34. $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 17, \\ 2xy - x^2 = 3. \end{cases}$

$\boxed{(3, 2);\ (-3, -2);\ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{\sqrt{3}}\right);\ \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{5}{\sqrt{3}}\right)}$

35. $\begin{cases} 2x^2 + xy - y^2 = 20, \\ x^2 - 4xy + 7y^2 = 13. \end{cases}$

$\boxed{(3, 2);\ (-3, -2);\ \left(-\frac{17}{2\sqrt{7}}, \frac{1}{2\sqrt{7}}\right);\ \left(\frac{17}{2\sqrt{7}}, -\frac{1}{2\sqrt{7}}\right)}$

36. (*ОММО, 2015, 9–11*)

$$\begin{cases} 5x^2 + 14xy + 10y^2 = 17, \\ 4x^2 + 10xy + 6y^2 = 8. \end{cases}$$

$\boxed{(-1, 2),\ (1, -2),\ (11, -7),\ (-11, 7)}$

37. (*МГУ, геологич. ф-т, 2003*)

$$\begin{cases} 2x^2 - y^2 + 3 = 0, \\ 6y^3 - 18y - 13x^3 - 3x = 0. \end{cases}$$

$\boxed{(0, \sqrt{3});\ (0, -\sqrt{3});\ \left(\sqrt{\tfrac{119}{3}}, 11\sqrt{\tfrac{119}{3}}\right);\ \left(-\sqrt{\tfrac{119}{3}}, -11\sqrt{\tfrac{119}{3}}\right)}$

38. (*«Физтех», 2012*)

$$\begin{cases} \dfrac{5x}{y} - \dfrac{9y}{x} + 10 = \dfrac{6}{xy}\,, \\ \dfrac{2x}{y} + \dfrac{3y}{x} + 4 = \dfrac{9}{xy}\,. \end{cases}$$

$\boxed{(1, 1);\ (-1, -1);\ (3, -1),\ (-3, 1)}$

39. (*«Физтех», 2014*)

$$\begin{cases} y^3 - x^2 - xy + 1 = 0, \\ 2y^3 - 3x^2 - 5xy - 2y^2 + 2 = 0. \end{cases}$$

$\boxed{(1, -1);\ (-2, 1);\ \left(\sqrt{5} - 1, \tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right);\ \left(-\sqrt{5} - 1, \tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}$

40. (ограничиться отысканием целочисленных решений)

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 2, \\ 2xy^2 - x^2y = 1. \end{cases}$$

$\boxed{(1, 1)}$

41. $\begin{cases} (x - y)xy = 30, \\ (x + y)xy = 120. \end{cases}$

$\boxed{(5, 3)}$

42. $\begin{cases} y^2 - xy = -12, \\ x^2 - xy = 28. \end{cases}$

$\boxed{(7, 3);\ (-7, -3)}$

43. $\begin{cases} x^2y^3 + x^3y^2 = 12, \\ x^2y^3 - x^3y^2 = 4. \end{cases}$

$\boxed{(1, 2)}$

44. $\begin{cases} x^4 - y^4 = 15, \\ x^3y - xy^3 = 6. \end{cases}$

$\boxed{(2, 1);\ (-2, -1)}$

45. $\begin{cases} (x+y)(x^2-y^2)=16, \\ (x-y)(x^2+y^2)=40. \end{cases}$

$\boxed{(3,-1);\ (1,-3)}$

46. (*«Физтех», 2019, 9*) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x-y-3xy=-1, \\ 9x^2y^2+9x^2+y^2-6xy=13. \end{cases}$$

$\boxed{\left(-\tfrac{2}{3};1\right),\ (1;1),\ \left(-\tfrac{1}{3};-3\right),\ \left(-\tfrac{1}{3};2\right)}$

47. (*«Физтех», 2019, 9*) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x+y+2xy=11, \\ 2x^2y+xy^2=15. \end{cases}$$

$\boxed{\left(\tfrac{1}{2};5\right),\ (1;3),\ \left(\tfrac{3}{2};2\right),\ \left(\tfrac{5}{2};1\right)}$

48. (*«Физтех», 2016, 9–11*)

$$\begin{cases} x^2y+xy^2-2x-2y+10=0, \\ x^3y-xy^3-2x^2+2y^2-30=0. \end{cases}$$

$\boxed{(-4,-1)}$

49. (*МФТИ, 2006*)

$$\begin{cases} 5\sqrt[3]{2x^2y^3}=2(x^2+y^2), \\ 3\sqrt[3]{4x^4y^3}=4(y^2-x^2). \end{cases}$$

$\boxed{(0,0);\ (-2,4);\ (2,4)}$

50. (*МФТИ, 2000*)

$$\begin{cases} \dfrac{x^3}{2y}+3xy=25, \\ \dfrac{y^3}{x}-2xy=16. \end{cases}$$

$\boxed{(2,4);\ (-2,-4)}$

51. (*МФТИ, 2000*)

$$\begin{cases} \dfrac{x^3}{y^2}+\dfrac{3y}{4x}=2, \\ \dfrac{8y}{x^2}-\dfrac{6x}{y}=5. \end{cases}$$

$\boxed{(2,4);\ \left(\tfrac{256}{375},-\tfrac{2048}{5625}\right)}$

52. (*МФТИ, 2005*)

$$\begin{cases} 8x^2y - 3x^4 = 4, \\ 8y^3 - 3x^2y^2 = 2. \end{cases}$$

$\boxed{\left(\sqrt{2}, 1\right);\ \left(-\sqrt{2}, 1\right)}$

53. (*МФТИ, 2006*)

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{x^2}(3+2x) = 3y - x, \\ y^2 + 2xy = 3x^2 - 2y. \end{cases}$$

$\boxed{\left(-\frac{12}{35}, \frac{8}{35}\right);\ \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}$

54. (*МФТИ, 2004*)

$$\begin{cases} y^7 + 2y^6 + 3x^2 = 0, \\ y^4 - xy = \dfrac{x^3}{y^4} - \dfrac{x^2}{y}\,. \end{cases}$$

$\boxed{(-125, -5);\ \left(9\sqrt{3}, -3\right);\ \left(-9\sqrt{3}, -3\right)}$

55. (*МФТИ, 2002*)

$$\begin{cases} y + \dfrac{x^3}{y^3} = \dfrac{y^3}{x} + \dfrac{x^2}{y}\,, \\ \dfrac{1}{y} + \dfrac{y^3}{x^3} + \dfrac{10}{x^2} = 0. \end{cases}$$

$\boxed{(4, -2)}$

56. (*МФТИ, 2008*)

$$\begin{cases} xy + y^2 - 2x^2 + 10x + 8y + 12 = 0, \\ x^2 - y^2 + 7 = 0. \end{cases}$$

$\boxed{(-3, 4);\ \left(\frac{1}{3}, -\frac{8}{3}\right);\ \left(\frac{29}{12}, -\frac{43}{12}\right)}$

57. (*МФТИ, 1996*)

$$\begin{cases} 2x^2 - xy - y^2 - 10x - 8y - 12 = 0, \\ 2x^2 + 3xy + y^2 + x - y - 6 = 0. \end{cases}$$

$\boxed{(3, -3);\ (2, -4);\ (0, -2)}$

58. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2019, 10–11*)

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x - y\sqrt{2}} + \dfrac{1}{x\sqrt{2} - y} = 1, \\ \dfrac{1}{x\sqrt{2} + y} - \dfrac{1}{x + y\sqrt{2}} = -1. \end{cases}$$

$\boxed{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{6}, \frac{-5+\sqrt{5}}{6}\right);\ \left(\frac{5-\sqrt{5}}{6}, \frac{-5-\sqrt{5}}{6}\right)}$

59. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2019, 9*) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 = y + z, \\ y^2 = z + x, \\ z^2 = x + y \end{cases}$$

при условии $x, y, z > 0$. В ответе укажите: если решений нет, то 0, если решение одно — произведение xyz, если решений несколько — сумму произведений xyz для каждого решения.

$\boxed{8}$

60. (*МГУ, ВКНМ, 2000*)

$$\begin{cases} 3x + y - z = 4, \\ x - 2y + 3z = 0, \\ x^2 + 2y + z^2 = 6x. \end{cases}$$

$\boxed{(1, 2, 1);\ \left(\frac{44}{25}, -\frac{28}{5}, -\frac{108}{25}\right)}$

61. (*ОММО, 2012*)

$$\begin{cases} \dfrac{ab}{a+b} = 1, \\ \dfrac{bc}{b+c} = 2, \\ \dfrac{ca}{c+a} = 4. \end{cases}$$

$\boxed{\left(\frac{8}{3}; \frac{8}{5}; -8\right)}$

62. (*ОММО, 2018*)

$$\begin{cases} x^2 = (y - z)^2 - 3, \\ y^2 = (z - x)^2 - 7, \\ z^2 = (x - y)^2 + 21. \end{cases}$$

$\boxed{(1, 3, 5);\ (-1, -3, -5)}$

63. (*«Физтех», 2015, 10–11*)

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y+z} = \dfrac{1}{12}, \\ \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{x+z} = \dfrac{1}{6}, \\ \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

$\boxed{(-4, 2, 1)}$

64. (*МГУ, ИСАА, 2004*)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = xyz, \\ y^2 + z^2 = xyz, \\ z^2 + x^2 = xyz. \end{cases}$$

$\boxed{(0, 0, 0);\ (2, 2, 2);\ (2, -2, -2);\ (-2, 2, -2);\ (-2, -2, 2)}$

65. (*ОММО, 2011*)

$$\begin{cases} x+y+z=13, \\ x^2+y^2+z^2=61, \\ xy+xz=2yz. \end{cases}$$

$\boxed{(4,3,6);\ (4,6,3)}$

66. (*ОММО, 2017*)

$$\begin{cases} x+y+2-4xy=0, \\ y+z+2-4yz=0, \\ z+x+2-4zx=0. \end{cases}$$

$\boxed{(1,1,1);\ \left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}$

67. (*«Физтех», 2009*)

$$\begin{cases} x^2-z^2=2x-3y+4z, \\ z^2-y^2=x+4y-3z, \\ y^2-x^2=-3x-5y+z. \end{cases}$$

$\boxed{(0,0,0);\ (1,-1,-2);\ \left(\frac{17+\sqrt{37}}{6},\frac{-1+\sqrt{37}}{6},\frac{-1+\sqrt{37}}{3}\right);\ \left(\frac{17-\sqrt{37}}{6},\frac{-1-\sqrt{37}}{6},\frac{-1-\sqrt{37}}{3}\right)}$

68. (*«Физтех», 2009*)

$$\begin{cases} 2x^2=yz-2x, \\ 2y^2=-xz+2y, \\ 2z^2=-xy+2z. \end{cases}$$

$\boxed{(0,0,0);\ (-1,0,0);\ (0,1,0);\ (0,0,1);\ (-2,2,2);\ \left(\frac{2}{7},\frac{6}{7},\frac{6}{7}\right);\ \left(-\frac{6}{7},-\frac{2}{7},\frac{6}{7}\right);\ \left(-\frac{6}{7},\frac{6}{7},-\frac{2}{7}\right)}$

69. (*МФТИ, 2006*)

$$\begin{cases} 2yz+\dfrac{3}{x}+3=0, \\ xy+\dfrac{4}{z}-2=0, \\ xz+\dfrac{2}{y}+2=0. \end{cases}$$

$\boxed{(3,2,-1)}$

70. (*МФТИ, 2003*)

$$\begin{cases} 4zx^2-yz^2+2xy^2=3xyz, \\ zy^2+2xz^2-4yx^2=3xyz, \\ 2xy-2xz+yz=3. \end{cases}$$

$\boxed{(1,1,-1);\ (-1,-1,1);\ \left(\frac{1}{2},2,1\right);\ \left(-\frac{1}{2},-2,-1\right);\ \left(\frac{1}{2},-1,-2\right);\ \left(-\frac{1}{2},1,2\right)}$

71. (*МФТИ, 2001*)

$$\begin{cases} 3x - y - 5z - 2yz = 0, \\ x - 5y - z - 2z^2 = 0, \\ x + 9y - 3z + 2xz = 0. \end{cases}$$

$\boxed{(0,0,0);\ \left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},-1\right);\ \left(-\frac{5}{6},-\frac{1}{6},-\frac{1}{2}\right)}$

72. (*МФТИ, 2002*)

$$\begin{cases} 3x^3 - 3y^3 + z^3 - xyz - 3 = 0, \\ 3y^3 - x^3 - z^3 - xyz + 5 = 0, \\ x^3 - y^3 + z^3 - xyz - 2 = 0. \end{cases}$$

$\boxed{\left(-\sqrt[3]{4},-\sqrt[3]{\frac{9}{2}},-\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\right);\ \left(-\sqrt[3]{\frac{1}{4}},-\sqrt[3]{\frac{3}{4}},\sqrt[3]{\frac{9}{4}}\right)}$

73. (*МФТИ, 2004*)

$$\begin{cases} (x+y)^2 = 3 + 4z^2, \\ (2z-y)^2 = 4 + x^2, \\ (2z-x)^2 = 2 + y^2. \end{cases}$$

$\boxed{\left(\frac{5}{6},\frac{7}{6},-\frac{1}{2}\right);\ \left(-\frac{5}{6},-\frac{7}{6},\frac{1}{2}\right)}$

74. (*«Физтех», 2009*)

$$\begin{cases} (x-y)(x^2+y^2) = 5, \\ (y+z)(y^2+z^2) = 13, \\ (z-x)(x^2+z^2) = 40. \end{cases}$$

$\boxed{(-1,-2,3)}$

75. (*МФТИ, 1991*)

$$\begin{cases} 3xz + 1 = 4x + 3z, \\ 4xy - 3xz = 4y - 3z + 9, \\ xy - zy = x + 3 - 2z. \end{cases}$$

$\boxed{\left(-\frac{1}{2},-1,\frac{2}{3}\right);\ \left(\frac{5}{2},3,2\right)}$

76. (*«Высшая проба», 2015, 10*) Найдите все тройки действительных чисел x, y, z, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} x^3y^3z^3 = 1, \\ xy^5z^3 = 2, \\ xy^3z^5 = 3. \end{cases}$$

$\boxed{\left(\frac{1}{\sqrt[6]{6}},\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[6]{6}},\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[6]{6}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt[6]{6}},-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[6]{6}},\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[6]{6}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt[6]{6}},\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[6]{6}},-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[6]{6}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt[6]{6}},-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[6]{6}},-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[6]{6}}\right)}$

77. (*«Высшая проба», 2017, 8*) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x} = \dfrac{y+z}{2}\,, \\ \sqrt{y} = \dfrac{z+x}{2}\,, \\ \sqrt{z} = \dfrac{x+y}{2} \end{cases}$$

и доказать, что других решений, кроме найденных, нет.

$\boxed{(0, 0, 0);\ (1, 1, 1)}$

78. (*МГУ, мехмат, 2002-03.5*) Решить систему

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x} - 9xy = 2, \\ \dfrac{z}{y} - 9yz = 6, \\ \dfrac{3x}{z} - 3zx = 2. \end{cases}$$

$\boxed{\left(\frac{1}{3}\operatorname{tg}\alpha, \frac{1}{3}\operatorname{tg}2\alpha, \operatorname{tg}4\alpha\right),\ \text{где } \alpha = \pm\frac{\pi}{7}, \pm\frac{2\pi}{7}, \pm\frac{3\pi}{7}}$

79. (*МГУ, мехмат, 2007.2*) Графики функций

$$f(x) = 2x^2 - 2x - 1 \quad \text{и} \quad g(x) = -5x^2 + 2x + 3$$

пересекаются в двух точках. Найти коэффициенты a и b в уравнении прямой $y = ax + b$, проходящей через те же точки.

$\boxed{y = -\frac{6}{7}x + \frac{1}{7}}$