

# Системы алгебраических уравнений

## Содержание

1	Двойная замена . . . . .	1
2	Симметрические системы . . . . .	2
3	Сложение уравнений . . . . .	4
4	Однородные системы . . . . .	5
5	Умножение и деление уравнений . . . . .	6
6	Упрощение одного из уравнений . . . . .	7
7	Системы с тремя неизвестными . . . . .	8
8	Задачи . . . . .	11

Если вам встретилась сложная система уравнений, то придётся проявлять изобретательность и отыскивать некий трюк, поскольку никакого единого метода решения таких систем не существует. Необходимым условием успеха в данном случае является большой опыт решения систем уравнений и знание ряда возникающих при этом стандартных ситуаций.

Данная статья посвящена только системам рациональных уравнений (обе части которых суть многочлены или отношения многочленов). Системы иррациональных уравнений будут рассмотрены в статье «[Иррациональные уравнения и системы](#)».

## 1 Двойная замена

Может оказаться, что две переменные входят в систему лишь в составе двух устойчивых выражений. Обозначаем эти выражения новыми буквами!

Задача 1. Решить систему:

$$\begin{cases} x + y + \frac{x}{y} = 9, \\ \frac{(x + y)x}{y} = 20. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Делаем замену  $u = x + y$ ,  $v = \frac{x}{y}$  и приходим к системе

$$\begin{cases} u + v = 9, \\ uv = 20, \end{cases}$$

из которой легко находим  $u = 5$ ,  $v = 4$  или  $u = 4$ ,  $v = 5$  (здесь и далее подробности в простых ситуациях опускаются). В первом случае получаем систему

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ \frac{x}{y} = 4, \end{cases}$$

решением которой служит пара  $x = 4$ ,  $y = 1$ . Во втором случае имеем систему

$$\begin{cases} x + y = 4, \\ \frac{x}{y} = 5, \end{cases}$$

из которой  $x = \frac{10}{3}$ ,  $y = \frac{2}{3}$ .

ОТВЕТ:  $(4, 1)$ ;  $(\frac{10}{3}, \frac{2}{3})$ .

ЗАДАЧА 2. (МФТИ, 2007) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} xy + 2x - 3y + 2 = 0, \\ 2x^2y - 3xy^2 - 12x + 18y = 16. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Запишем второе уравнение в виде

$$xy(2x - 3y) - 6(2x - 3y) = 16$$

и сделаем двойную замену

$$u = xy, \quad v = 2x - 3y.$$

Система примет вид:

$$\begin{cases} u + v + 2 = 0, \\ uv - 6v = 16. \end{cases}$$

Легко находим:  $u = 2$ ,  $v = -4$ , что приводит к системе

$$\begin{cases} xy = 2, \\ 2x - 3y = -4. \end{cases}$$

Эта система также не представляет сложностей. Её решения:  $x = 1$ ,  $y = 2$  или  $x = -3$ ,  $y = -\frac{2}{3}$ .

ОТВЕТ:  $(1, 2)$ ;  $(-3, -\frac{2}{3})$ .

## 2 Симметрические системы

Функция  $f(x, y)$  двух переменных  $x$  и  $y$  называется *симметрической*, если  $f(y, x) = f(x, y)$ ; иными словами, симметрическая функция переходит сама в себя при одновременной замене  $x$  на  $y$  и  $y$  на  $x$ . Например,  $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$  — симметрическая функция, а  $g(x, y) = x^3 + y$  симметрической не является, поскольку  $g(y, x) = y^3 + x \neq g(x, y)$ .

Система

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

называется *симметрической*, если  $f(x, y)$  и  $g(x, y)$  — симметрические многочлены. В симметрических системах отлично работает двойная замена

$$u = x + y, \quad v = xy. \tag{1}$$

ЗАДАЧА 3. («Покори Воробьёвы горы!», 2010) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2y + xy^2 = 2 - 2x - 2y, \\ x + y + 5 = -xy. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Имеем:

$$\begin{cases} xy(x + y) + 2(x + y) = 2, \\ x + y + xy = -5, \end{cases}$$

или, делая замену (1),

$$\begin{cases} uv + 2u = 2, \\ u + v = -5. \end{cases}$$

Из второго уравнения выражаем  $v = -u - 5$  и подставляем это в первое уравнение; после преобразований получим

$$u^2 + 3u + 2 = 0; \quad u_1 = -1, \quad u_2 = -2.$$

Соответственно,  $v_1 = -4$ ,  $v_2 = -3$ , так что исходная система равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x + y = -1, \\ xy = -4 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x + y = -2, \\ xy = -3. \end{cases}$$

Обе они решаются элементарно.

ОТВЕТ:  $\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}, \frac{-1-\sqrt{17}}{2}\right); \left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2}, \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right); (1, -3); (-3, 1)$ .

Оказывается, что любой симметрический многочлен двух переменных  $x, y$  можно записать как многочлен двух переменных  $u, v$ . Это теорема, которую мы не будем доказывать; нам важно уметь выражать через  $u$  и  $v$  многочлены  $x^2 + y^2$ ,  $x^3 + y^3$  и  $x^4 + y^4$ .

Имеем:

$$u^2 = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + y^2 + 2v,$$

откуда

$$x^2 + y^2 = u^2 - 2v.$$

Далее,

$$u^3 = (x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y) = x^3 + y^3 + 3uv,$$

откуда

$$x^3 + y^3 = u^3 - 3uv.$$

Наконец,

$$\begin{aligned} u^4 &= (x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 = \\ &= x^4 + y^4 + 4xy(x^2 + y^2) + 6x^2y^2 = x^4 + y^4 + 4v(u^2 - 2v) + 6v^2, \end{aligned}$$

откуда

$$x^4 + y^4 = u^4 - 4u^2v + 2v^2.$$

ЗАДАЧА 4. Решить систему

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 19, \\ (xy + 8)(x + y) = 2. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Легко видеть, что эта система является симметрической. Делая замену  $u = x + y$ ,  $v = xy$ , получим систему

$$\begin{cases} u^3 - 3uv = 19, \\ u(v + 8) = 2. \end{cases}$$

Из второго уравнения выражаем  $uv = 2 - 8u$  и подставляем в первое уравнение:

$$u^3 - 3(2 - 8u) = 19 \Leftrightarrow u^3 + 24u - 25 = 0.$$

Очевиден корень  $u = 1$ , что позволяет разложить левую часть на множители:

$$(u - 1)(u^2 + u + 25) = 0 \Leftrightarrow u = 1.$$

Далее находим  $v = -6$  и приходим к системе

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ xy = -6, \end{cases}$$

откуда  $x = 3, y = -2$  или наоборот,  $x = -2, y = 3$ .

ОТВЕТ:  $(3, -2); (-2, 3)$ .

Обратите внимание, что у симметрической системы и ответ симметричен: если пара  $(x_0, y_0)$  является решением, то и пара  $(y_0, x_0)$  — тоже решение.

### 3 Сложение уравнений

Одно из уравнений системы можно заменить на сумму (или разность) её уравнений. В результате получим систему, эквивалентную исходной.

ЗАДАЧА 5. Решить систему

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 7, \\ x^2y + xy^2 = -2. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Эту симметрическую систему можно решить общим методом, изложенным выше. Но можно и сразу сложить первое уравнение с утроенным вторым:

$$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = 1 \Leftrightarrow (x + y)^3 = 1 \Leftrightarrow x + y = 1.$$

Отсюда  $y = 1 - x$ ; подставляем это в первое уравнение системы:

$$x^3 - (x - 1)^3 = 7 \Leftrightarrow x^3 - (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = 7 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0.$$

Дальше ясно.

ОТВЕТ:  $(-1, 2); (2, -1)$

ЗАДАЧА 6. (МГУ, филологич. ф-т, 2007) Решите систему

$$\begin{cases} 2x^2 - x - 3y = 0, \\ 2y^2 + y + 3x = 0. \end{cases} \quad (2)$$

РЕШЕНИЕ. Вычитаем из первого уравнения второе:

$$0 = 2(x^2 - y^2) - 4(x + y) = 2(x + y)(x - y - 2).$$

Если  $y = -x$ , то первое уравнение системы (2) даёт  $2x^2 + 2x = 0$ , откуда  $x = 0$  (и тогда  $y = 0$ ) или  $x = -1$  (и тогда  $y = 1$ ).

Если же  $y = x - 2$ , то первое уравнение (2) приводит к уравнению  $x^2 - 2x + 3 = 0$ , которое не имеет корней.

ОТВЕТ:  $(0, 0); (-1, 1)$ .

## 4 Однородные системы

Функция  $f(x, y)$  двух переменных  $x$  и  $y$  называется *однородным многочленом второй степени*, если она имеет вид

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

(с очевидным дополнительным условием, что не все коэффициенты  $a$ ,  $b$  и  $c$  равны нулю). Аналогично определяются однородные многочлены более высоких степеней; например, однородный многочлен третьей степени имеет вид

$$f(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3.$$

*Однородная система* (второй степени) — это система вида

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1, \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = d_2, \end{cases} \quad (3)$$

где  $d_1$  и  $d_2$  — некоторые числа. Если оба они не равны нулю, то, умножая уравнения (3) на подходящие множители (например, на  $d_2$  и  $d_1$  соответственно) и вычитая их друг из друга, мы получим однородный многочлен, равный нулю.

**ЗАДАЧА 7.** Решить систему

$$\begin{cases} 3x^2 + 5xy - 2y^2 = 20, \\ x^2 + xy + y^2 = 7. \end{cases}$$

**РЕШЕНИЕ.** Умножим первое уравнение на 7, а второе — на 20:

$$\begin{cases} 21x^2 + 35xy - 14y^2 = 140, \\ 20x^2 + 20xy + 20y^2 = 140. \end{cases}$$

Вычитаем из первого уравнения второе:

$$x^2 + 15xy - 34y^2 = 0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно  $x$  (с параметром  $y$ ), находим  $x = 2y$  или  $x = -17y$ . Остаётся подставить это в любое уравнение исходной системы (проще во второе) и довести задачу до ответа. Сделайте это самостоятельно.

**ОТВЕТ:**  $(2, 1)$ ;  $(-2, -1)$ ;  $\left(-\frac{17}{\sqrt{39}}, \frac{1}{\sqrt{39}}\right)$ ;  $\left(\frac{17}{\sqrt{39}}, -\frac{1}{\sqrt{39}}\right)$

**ЗАДАЧА 8.** («Физтех», 2012) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{6x}{y} + \frac{2y}{x} - 5 = 4xy, \\ \frac{7x}{y} + \frac{4y}{x} - 10 = 3xy. \end{cases}$$

**РЕШЕНИЕ.** Формально это не совсем система вида (3), то принцип действия тот же. Умножим первое уравнение на 3, второе на 4, после чего вычтем из первого второе:

$$-\frac{10x}{y} - \frac{10y}{x} + 25 = 0.$$

Теперь делаем замену  $t = \frac{x}{y}$ :

$$2t + \frac{2}{t} - 5 = 0 \Leftrightarrow \frac{2t^2 - 5t + 2}{t} = 0 \Leftrightarrow t = 2 \text{ или } t = \frac{1}{2}.$$

При  $t = 2$  имеем  $x = 2y$ ; первое уравнение даёт тогда  $8y^2 = 8$ ,  $y = \pm 1$ , откуда  $x = \pm 2$  (знак  $x$  совпадает со знаком  $y$ ). Аналогично рассматривается случай  $t = \frac{1}{2}$ .

ОТВЕТ:  $(2, 1)$ ;  $(-2, -1)$ ;  $(\frac{1}{2}, 1)$ ;  $(-\frac{1}{2}, -1)$ .

## 5 Умножение и деление уравнений

Под умножением уравнений  $A = B$  и  $C = D$  мы понимаем переход к уравнению  $AC = BD$ , а под делением — переход к уравнению  $A/C = B/D$ . В последнем случае необходимо проследить за тем, чтобы не получить нуль в знаменателе.

ЗАДАЧА 9. Решить систему

$$\begin{cases} x^2 y^3 = 16, \\ x^3 y^2 = 2. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Ясно, что  $x \neq 0$  и  $y \neq 0$ . Делим первое уравнение на второе:

$$\frac{y}{x} = 8 \Leftrightarrow y = 8x.$$

Подставим это во второе уравнение:

$$x^3 \cdot 64x^2 = 2 \Leftrightarrow x^5 = \frac{1}{32} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Теперь находим  $y = 4$ .

ОТВЕТ:  $(\frac{1}{2}, 4)$ .

ЗАДАЧА 10. (МФТИ, 2006) Найти действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} 5\sqrt[3]{x^5 y^2} = 4(x^2 + y^2), \\ 3\sqrt[3]{xy^4} = x^2 - y^2. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Формально мы имеем дело с иррациональными уравнениями, которые будут рассматриваться в одной из следующих статей. Однако никакой специфики иррациональных уравнений тут на самом деле нет.

Отметим сразу же, что если одна из переменных равна нулю, то и вторая равна нулю. Пара  $(0, 0)$  является решением системы, а остальные решения ищем в предположении  $x \neq 0$  и  $y \neq 0$ .

Перемножаем наши уравнения:

$$\begin{aligned} 15x^2 y^2 = 4(x^4 - y^4) &\Leftrightarrow 4x^4 - 15x^2 y^2 - 4y^4 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x^2 - 4y^2)(4x^2 + y^2) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4y^2 \Leftrightarrow x = \pm 2y. \end{aligned}$$

Если  $x = 2y$ , то второе уравнение даёт:

$$3\sqrt[3]{2y^5} = 3y^2 \Leftrightarrow 2y^5 = y^6 \Leftrightarrow y = 2,$$

и тогда  $x = 4$ . Аналогично, если  $x = -2y$ , то  $y = -2$  и  $x = 4$ .

ОТВЕТ:  $(0, 0)$ ;  $(4, 2)$ ;  $(4, -2)$ .

В наиболее сложных случаях перед умножением или делением уравнений нужно ещё основательно поработать.

ЗАДАЧА 11. (МФТИ, 2006) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{y^2}{x^2}(2+x) = 4y - 3x, \\ 2y^2 - 3xy = 4y - x^2. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Умножаем первое уравнение на  $x^2$  (ограничение  $x \neq 0$  будет учтено позже):

$$\begin{cases} 2y^2 + xy^2 = 4x^2y - 3x^3, \\ 2y^2 - 3xy = 4y - x^2. \end{cases}$$

Теперь наступает самый трудный момент: нужно разглядеть «хорошие» квадратные трёхчлены  $t^2 - 4t + 3 = (t-1)(t-3)$  и  $t^2 - 3t + 2 = (t-1)(t-2)$  с общим множителем  $t-1$ . Перепишем систему следующим образом:

$$\begin{cases} x(y^2 - 4xy + 3x^2) = -2y^2, \\ x^2 - 3xy + 2y^2 = 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(y-x)(y-3x) = -2y^2, \\ (x-y)(x-2y) = 4y. \end{cases}$$

Легко видеть, что обе части второго уравнения не могут обращаться в нуль (предполагая обратное, в каждом случае приходим к равенству  $x = 0$  вопреки ограничению). Делим первое уравнение на второе:

$$\frac{x(y-3x)}{x-2y} = \frac{y}{2} \Leftrightarrow 2y^2 + xy - 6x^2 = 0 \Leftrightarrow (y+2x)(2y-3x) = 0.$$

Отсюда имеем  $y = -2x$  или  $y = \frac{3}{2}x$ . Остаётся подставить это во второе (так проще) уравнение исходной системы и после элементарных вычислений получить ответ.

ОТВЕТ:  $(-\frac{8}{15}, \frac{16}{15})$ ;  $(6, 9)$ .

## 6 Упрощение одного из уравнений

В отдельных случаях одно из уравнений системы удаётся привести к виду  $AB = 0$ , где  $A$  и  $B$  — некоторые (несложные) выражения, зависящие от переменных.

ЗАДАЧА 12. (МФТИ, 1999) Найти все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^9 - x^8 - 2y^2 = 0, \\ x^7 + \frac{y^3}{x^4} = y^2 + yx^3. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Первое уравнение ничего хорошего нам не сулит, поэтому возьмёмся за второе. Помня об ограничении  $x \neq 0$ , умножаем его на  $x^4$ :

$$x^{11} + y^3 = x^4y^2 + x^7y \Leftrightarrow x^7(x^4 - y) - y^2(x^4 - y) = 0 \Leftrightarrow (x^7 - y^2)(x^4 - y) = 0.$$

Отсюда имеем  $y^2 = x^7$  или  $y = x^4$ .

Пусть сначала  $y^2 = x^7$ . Подставляем это в первое уравнение:

$$x^9 - x^8 - 2x^7 = 0,$$

что при ограничении  $x \neq 0$  равносильно квадратному уравнению

$$x^2 - x - 2 = 0$$

с корнями  $-1$  и  $2$ . Корню  $x = -1$  не соответствует никакое значение  $y$  (ибо  $y^2 = -1$ ), а для корня  $x = 2$  получаем  $y^2 = 2^7$ , то есть  $y = \pm 8\sqrt{2}$ .

Пусть теперь  $y = x^4$ . Подставляем в первое уравнение:

$$x^9 - 3x^8 = 0,$$

откуда с учётом ограничения  $x \neq 0$  имеем  $x = 3$  и соответственно  $y = 81$ .

ОТВЕТ:  $(2, 8\sqrt{2})$ ;  $(2, -8\sqrt{2})$ ;  $(3, 81)$ .

Может случиться, что уравнение, воспринимаемое как квадратное относительно одной из переменных, имеет «хороший» дискриминант.

ЗАДАЧА 13. (МФТИ, 2008) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 + 5x - 9y + 4 = 0, \\ x^2 - y^2 - 5 = 0. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Второе уравнение имеет довольно простой вид, и вместе с тем ничего полезного из него не извлечёшь. Поэтому работать надо с первым уравнением. Запишем его как квадратное относительно  $x$  (с параметром  $y$ ):

$$x^2 + (5 - 3y)x + 2y^2 - 9y + 4 = 0.$$

Дискриминант:

$$D = (5 - 3y)^2 - 4(2y^2 - 9y + 4) = y^2 + 6y + 9 = (y + 3)^2,$$

откуда

$$x = \frac{3y - 5 + (y + 3)}{2} = 2y - 1 \quad \text{или} \quad x = \frac{3y - 5 - (y + 3)}{2} = y - 4.$$

Остаётся сделать эти подстановки во второе уравнение. Несложные технические детали описывать не будем — вы легко сможете довести решение до конца самостоятельно.

ОТВЕТ:  $(3, 2)$ ;  $(-\frac{7}{3}, -\frac{2}{3})$ ;  $(-\frac{21}{8}, \frac{11}{8})$ .

## 7 Системы с тремя неизвестными

Системы трёх уравнений с тремя неизвестными решаются теми же методами, которые были изложены выше. Разумеется, задачи в целом становятся сложнее.

ЗАДАЧА 14. (ОММО, 2012) Решите систему

$$\begin{cases} \frac{xy}{x+y} = 1, \\ \frac{yz}{y+z} = 2, \\ \frac{xz}{x+z} = 3. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Запишем уравнения в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{x+y}{xy} = 1, \\ \frac{y+z}{yz} = \frac{1}{2}, \\ \frac{x+z}{xz} = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1, \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Теперь делаем замену  $u = 1/x$ ,  $v = 1/y$ ,  $w = 1/z$  и приходим к системе

$$\begin{cases} u + v = 1, \\ v + w = \frac{1}{2}, \\ u + w = \frac{1}{3}, \end{cases}$$

которая решается элементарно:  $u = \frac{5}{12}$ ,  $v = \frac{7}{12}$ ,  $w = -\frac{1}{12}$ . Отсюда легко получаем ответ.

ОТВЕТ:  $(\frac{12}{5}, \frac{12}{7}, -12)$ .

ЗАДАЧА 15. (МФТИ, 2002) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^3 - y^3 - 2z^3 + xyz + 5 = 0, \\ y^3 + 2z^3 - x^3 - 2xyz - 2 = 0, \\ x^3 - y^3 - z^3 + xyz + 4 = 0. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Сложим первое уравнение со вторым:

$$x^3 - xyz + 3 = 0. \quad (4)$$

Вычтем из первого уравнения исходной системы удвоенное третье:

$$y^3 - xyz - 3 = 0. \quad (5)$$

Наконец, сложим второе уравнение исходной системы с третьим:

$$z^3 - xyz + 2 = 0. \quad (6)$$

Исходная система равносильна системе уравнений (4)–(6):

$$\begin{cases} x^3 = xyz - 3, \\ y^3 = xyz + 3, \\ z^3 = xyz - 2. \end{cases} \quad (7)$$

Перемножим уравнения этой системы и сделаем замену  $t = xyz$ :

$$t^3 = (t-3)(t+3)(t-2) \Leftrightarrow 2t^2 + 9t - 18 = 0.$$

Отсюда  $t = -6$  или  $t = \frac{3}{2}$ . Остаётся подставить эти значения в систему (7) и найти  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

ОТВЕТ:  $(-\sqrt[3]{9}, -\sqrt[3]{3}, -2)$ ;  $(-\sqrt[3]{\frac{3}{2}}, \sqrt[3]{\frac{9}{2}}, -\sqrt[3]{\frac{1}{2}})$ .

ЗАДАЧА 16. (МФТИ, 2004) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (3y - x)^2 = 2 + z^2, \\ (3y + z)^2 = 3 + x^2, \\ (z - x)^2 = 4 + 9y^2. \end{cases} \quad (8)$$

РЕШЕНИЕ. Здесь дело идёт к делению уравнений. Перепишем систему следующим образом:

$$\begin{cases} (x - 3y)^2 - z^2 = 2, \\ x^2 - (3y + z)^2 = -3, \\ (x - z)^2 - 9y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 3y + z)(x - 3y - z) = 2, \\ (x - 3y - z)(x + 3y + z) = -3, \\ (x + 3y - z)(x - 3y - z) = 4. \end{cases} \quad (9)$$

Левые части наших уравнений не равны нулю. Делим первое уравнение системы (9) на второе:

$$\frac{x - 3y + z}{x + 3y + z} = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow 5x - 3y + 5z = 0. \quad (10)$$

Делим третье уравнение системы (9) на первое:

$$\frac{x + 3y - z}{x - 3y + z} = 2 \Leftrightarrow x - 9y + 3z = 0. \quad (11)$$

Исходная система (8) равносильна системе, составленной из первого уравнения (8) и уравнений (10) и (11):

$$\begin{cases} (3y - x)^2 = 2 + z^2, \\ 5x - 3y + 5z = 0, \\ x - 9y + 3z = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Из третьего уравнения системы (12) имеем  $x = 9y - 3z$ ; подставим это во второе уравнение и найдём  $y = \frac{5}{21}z$ , откуда  $x = 9 \cdot \frac{5}{21}z - 3z = -\frac{6}{7}z$ . Полученные выражения  $x$  и  $y$  через  $z$  подставляем в первое уравнение (12) и в результате находим  $z = \pm\frac{7}{6}$ , после чего определяем соответствующие значения  $x$  и  $y$ .

ОТВЕТ:  $(-1, \frac{5}{18}, \frac{7}{6})$ ;  $(1, -\frac{5}{18}, -\frac{7}{6})$ .

ЗАДАЧА 17. («Физтех», 2009) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (y - x)(x^2 + y^2) = 15, \\ (y + z)(y^2 + z^2) = -13, \\ (z - x)(x^2 + z^2) = -20. \end{cases} \quad (13)$$

РЕШЕНИЕ. Мы хотим домножить каждое из уравнений на соответствующий множитель так, чтобы получить в левых частях разности четвёртых степеней. Однако равносильность такого преобразования требует обоснования.

Пусть  $y + x = 0$ , то есть  $y = -x$ . Тогда второе уравнение системы (13) примет вид

$$(z - x)(x^2 + z^2) = -13;$$

сопоставляя это с третьим уравнением (13), мы видим, что система (13) не будет иметь решений. Таким образом, ни одна тройка чисел  $(x, y, z)$ , для которой выполнено  $y + x = 0$ , не является решением системы (13); иными словами, умножив первое уравнение на  $y + x$ , мы получим систему, равносильную исходной.

Точно так же показывается, что ни одна тройка  $(x, y, z)$ , для которой выполнено  $z - y = 0$  или  $x + z = 0$ , не является решением системы (13). Умножая первое уравнение нашей системы на  $y + x$ , второе — на  $z - y$ , третье — на  $x + z$ , придём к равносильной системе

$$\begin{cases} y^4 - x^4 = 15(y + x), \\ z^4 - y^4 = 13(y - z), \\ x^4 - z^4 = 20(x + z). \end{cases}$$

Сложим эти три уравнения:  $0 = 28y + 35x + 7z$ , откуда  $z = -5x - 4y$ . Подставляя это в третье уравнение (13) и присоединяя первое уравнение (13), получим систему двух уравнений относительно  $x$  и  $y$ :

$$\begin{cases} (y - x)(x^2 + y^2) = 15, \\ (-6x - 4y)(x^2 + (5x + 4y)^2) = -20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - x^2y + xy^2 - y^3 = -15, \\ 39x^3 + 86x^2y + 64xy^2 + 16y^3 = 5. \end{cases}$$

Получилась однородная система третьей степени. Мы уже знаем, что нужно делать: умножаем второе уравнение на 3 и складываем с первым уравнением:

$$118x^3 + 257x^2y + 193xy^2 + 47y^3 = 0. \quad (14)$$

Если  $x = 0$ , то в силу этого уравнения и  $y = 0$  вопреки первому уравнению системы (13). Поэтому делим уравнение (14) на  $x^3 \neq 0$  и обозначаем  $t = \frac{y}{x}$ :

$$47t^3 + 193t^2 + 257t + 118 = 0. \quad (15)$$

Это, конечно, «жесть», но что поделаешь? Остаётся уповать лишь на то, что подберётся «маленький» корень. Ясно, что положительных корней уравнение (15) не имеет, поэтому начинаем с «маленьких» отрицательных. И действительно,  $t = -2$  является корнем! Имеем:

$$(47t^3 + 94t^2) + (99t^2 + 198t) + (59t + 118) = 0 \Leftrightarrow (t + 2)(47t^2 + 99t + 59) = 0.$$

Дискриминант уравнения  $47t^2 + 99t + 59 = 0$  отрицателен, поэтому уравнение (15) имеет лишь один корень  $t = -2$ . Отсюда  $y = -2x$ , и теперь закончить решение труда не составляет.

ОТВЕТ:  $(-1, 2, -3)$ .

## 8 Задачи

Во всех задачах по умолчанию требуется решить систему уравнений.

1. («Шаг в будущее», 2022, 8.2) Найдите все значения  $x$  и  $y$ , при которых выполнены оба уравнения

$$\begin{cases} x\sqrt{2\sqrt{2} + 2\sqrt{6} + 9 + 4\sqrt{3}} - 2y = y\sqrt{(1 - \sqrt{6} - \sqrt{2})^2}, \\ xy = 6 + 2x - 3y. \end{cases}$$

(7:7):(8:8)-(

2. («Шаг в будущее», 2019, 8.2) Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} y^2 + x^2 = 2xy + 4, \\ \frac{(y + 2) \cdot (x - 4)}{x^2 - 6x + 8} = x - 2. \end{cases}$$

{(1-1):(2:2):(3:3)}

3. («Шаг в будущее», 2019, 8.2) Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{y-x+1}{x^2-3x} = 1, \\ y^2+5+2xy = 6y+6x-x^2. \end{cases}$$

{(1;2;-);(1-;2;);(2;1-)}

4. 
$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{13}{6}, \\ x+y = 5. \end{cases}$$

(2;3);(3;2)

5. 
$$\begin{cases} \frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{13}{6}, \\ xy = 5. \end{cases}$$

(1-;5-);(1;5)

6. 
$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^2} + \frac{x^3}{y^3} = 14, \\ x+y = 3. \end{cases}$$

(1;2)

7. 
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5, \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 13. \end{cases}$$

( $\frac{3}{1}; \frac{2}{1}$ );( $\frac{2}{1}; \frac{3}{1}$ )

8. 
$$\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{y}{3} = 3, \\ \frac{x}{2} + \frac{3}{y} = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

(2;9);(1;3)

9. 
$$\begin{cases} x+y+\frac{x^2}{y^2} = 7, \\ \frac{(x+y)x^2}{y^2} = 12. \end{cases}$$

(1;1);(1;7);(6;-3);(6+2\sqrt{3};-2-2\sqrt{3});(6-2\sqrt{3};-2+2\sqrt{3})

10. 
$$\begin{cases} \frac{3}{x^2+y^2-1} + \frac{2y}{x} = 1, \\ x^2+y^2 + \frac{4x}{y} = 22. \end{cases}$$

(1;1);(-3;-1);(1;3);(14\sqrt{106};\frac{33}{4\sqrt{106}});(\frac{33}{96\sqrt{106}};-\frac{33}{4\sqrt{106}})

$$11. \begin{cases} \frac{x^2}{y^2} + \frac{x^3}{y^3} = 12, \\ x^2y^2 + xy = 6. \end{cases}$$

(1-2-);(1'2)

$$12. \begin{cases} xy - \frac{x}{y} = \frac{16}{3}, \\ xy - \frac{y}{x} = \frac{9}{2}. \end{cases}$$

(3-2-);(3'2)

13. («Росатом», 2020, 7.4) Решить систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0, \\ x^2 + z^2 - 4x - 6z = 0, \\ y^2 + z^2 + 2y - 6z = 0. \end{cases}$$

(0:0:0);(0;-2:0);(0;0:0);(0;0:6);(4;-2:0);(4;0:0);(4;-2:0);(4;0:6);(4;-2:6)

14. (МГУ, экономич. ф-т, 2002)

$$\begin{cases} y - xy - x = 11, \\ xy^2 - x^2y = -30. \end{cases}$$

(-2,3);(-3,2);(-1,5);(-5,1)

15. (МГУ, геологич. ф-т, 1998)

$$\begin{cases} x(1+y) = y+7, \\ x^2y - xy^2 = 6. \end{cases}$$

(3;2);(-2;-3);(3;0);(0;1);(0;6)

16. (МГУ, физический ф-т, 2003)

$$\begin{cases} \frac{17}{2x^2 + 3y} + \frac{12}{3x^2 - 2y} = 3, \\ \frac{6}{3x^2 - 2y} + \frac{34}{2x^2 + 3y} = 3. \end{cases}$$

(3;2);(3;-2)

17. (МФТИ, 2007)

$$\begin{cases} 2xy + 4x + 3y = 2, \\ 4x^2y + 3xy^2 + 12x + 9y = 8. \end{cases}$$

(-1/2, 2/3);(2/3, 1/2)

18. (МГУ, ф-т почвоведения, 2007)

$$\begin{cases} x + y + xy = 7, \\ x^2 + y^2 + xy = 13. \end{cases}$$

(1, 3); (3, 1)

19. 
$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 - 3x - 3y + xy = -1, \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y + 3xy = 1. \end{cases}$$

(1, 1)

20. 
$$\begin{cases} x^2y + xy^2 = 20, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{4}. \end{cases}$$

$(\frac{2}{11\sqrt{-5}}, \frac{2}{11\sqrt{41}}); (\frac{2}{11\sqrt{41}}, \frac{2}{11\sqrt{-5}}); (4, 1); (1, 4)$

21. («Покори Воробьёвы горы!», 2010)

$$\begin{cases} x^2y + x + xy^2 + y + 5 = 0, \\ x + y + xy + 5 = 0. \end{cases}$$

(3, -2); (-2, 3); (0, -5); (-5, 0)

22. (ОММО, 2016)

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 19, \\ x^4 + x^2y^2 + y^4 = 931. \end{cases}$$

(3, 5); (5, 3); (-3, -5); (-5, -3)

23. (МГУ, ДВИ, 2014.6) Найдите все положительные  $x, y$ , удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} x^{\frac{3}{2}} + y = 16, \\ x + y^{\frac{2}{3}} = 8. \end{cases}$$

8 = = 4, y = x

24. 
$$\begin{cases} x^3 + y^3 + 2x^2y + 2xy^2 = 21, \\ 2x^3 + 2y^3 + x^2y + xy^2 = 24. \end{cases}$$

(1, 2); (2, 1)

25. 
$$\begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17, \\ x + xy + y = 5. \end{cases}$$

(1, 2); (2, 1)



35. (МГУ, географич. ф-т, 2002)

$$\begin{cases} x^3 = 5x + y, \\ y^3 = 5y + x. \end{cases}$$

$$\left( \frac{z}{z^2 + \sqrt{z}}; \frac{z}{z^2 - \sqrt{z}} \right); \left( \frac{z}{z^2 - \sqrt{z}}; \frac{z}{z^2 + \sqrt{z}} \right); \left( \frac{z}{z^2 + \sqrt{z}}; \frac{z}{z^2 - \sqrt{z}} \right); \left( \frac{z}{z^2 - \sqrt{z}}; \frac{z}{z^2 + \sqrt{z}} \right) \\ ; (z^2 - z); (z^2 + z); (z^2 - z); (z^2 + z); (z^2 - z); (z^2 + z); (z^2 - z); (z^2 + z)$$

36. (МФТИ, 2008)

$$\begin{cases} 3x^2 = y^4 + y, \\ 5x = \frac{2y}{x} + y^2. \end{cases}$$

$$\left( \frac{z}{z^2 - 1}; \frac{z}{z^2 - 1} \cdot z \right); \left( \frac{z}{z^2 - 1}; \frac{z}{z^2 - 1} \cdot z \right)$$

37. («Ломоносов», 2016, 10–11) Даны 2017 уравнений:  $x_1 + x_2 = -2016$ ,  $x_2 + x_3 = -2014$ , ...,  $x_{1008} + x_{1009} = -2$ ,  $x_{1009} + x_{1010} = 0$ ,  $x_{1010} + x_{1011} = 2$ ,  $x_{1011} + x_{1012} = 4$ , ...,  $x_{2016} + x_{2017} = 2014$ ,  $x_{2017} + x_1 = 2016$ . Найдите  $x_{2017}$ .

9102

38. 
$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 3, \\ x^2 + 2xy - 2y^2 = 6. \end{cases}$$

$$(z - z); (z - z)$$

39. 
$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 17, \\ 2xy - x^2 = 3. \end{cases}$$

$$\left( \frac{z}{z^2 - 1}; \frac{z}{z^2 - 1} \right); \left( \frac{z}{z^2 - 1}; \frac{z}{z^2 - 1} \right); (z - z); (z - z); (z - z); (z - z)$$

40. 
$$\begin{cases} 2x^2 + xy - y^2 = 20, \\ x^2 - 4xy + 7y^2 = 13. \end{cases}$$

$$\left( \frac{z}{z^2 - 1}; \frac{z}{z^2 - 1} \right); \left( \frac{z}{z^2 - 1}; \frac{z}{z^2 - 1} \right); (z - z); (z - z); (z - z); (z - z)$$

41. (ОММО, 2015, 9–11)

$$\begin{cases} 5x^2 + 14xy + 10y^2 = 17, \\ 4x^2 + 10xy + 6y^2 = 8. \end{cases}$$

$$(z - z); (z - z); (z - z); (z - z); (z - z); (z - z)$$

42. (МГУ, геологич. ф-т, 2003)

$$\begin{cases} 2x^2 - y^2 + 3 = 0, \\ 6y^3 - 18y - 13x^3 - 3x = 0. \end{cases}$$

$$\left( \frac{z}{z^2 - 1}; \frac{z}{z^2 - 1} \right); \left( \frac{z}{z^2 - 1}; \frac{z}{z^2 - 1} \right); (z - z); (z - z); (z - z); (z - z)$$

43. («Физтех», 2012)

$$\begin{cases} \frac{5x}{y} - \frac{9y}{x} + 10 = \frac{6}{xy}, \\ \frac{2x}{y} + \frac{3y}{x} + 4 = \frac{9}{xy}. \end{cases}$$

(1'ε-) '(1-ε) :(1-1-) :(1'1)

44. («Физтех», 2014)

$$\begin{cases} y^3 - x^2 - xy + 1 = 0, \\ 2y^3 - 3x^2 - 5xy - 2y^2 + 2 = 0. \end{cases}$$

( $\frac{z}{x^2+1}$ , 1-ε^Λ-) : ( $\frac{z}{x^2-1}$ , 1-ε^Λ) :(1'z-) :(1-1)

45. (ограничиться отысканием целочисленных решений)

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 2, \\ 2xy^2 - x^2y = 1. \end{cases}$$

(1'1)

46. 
$$\begin{cases} (x-y)xy = 30, \\ (x+y)xy = 120. \end{cases}$$

(ε'ε)

47. 
$$\begin{cases} y^2 - xy = -12, \\ x^2 - xy = 28. \end{cases}$$

(ε-1-) :(ε'1)

48. 
$$\begin{cases} x^2y^3 + x^3y^2 = 12, \\ x^2y^3 - x^3y^2 = 4. \end{cases}$$

(z'1)

49. 
$$\begin{cases} x^4 - y^4 = 15, \\ x^3y - xy^3 = 6. \end{cases}$$

(1-z-) :(1'z)

50. 
$$\begin{cases} (x+y)(x^2-y^2) = 16, \\ (x-y)(x^2+y^2) = 40. \end{cases}$$

(ε-1) :(1-ε)

51. («Физтех», 2019, 9) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x - y - 3xy = -1, \\ 9x^2y^2 + 9x^2 + y^2 - 6xy = 13. \end{cases}$$

$$\left( \frac{2}{3}; \frac{2}{3} \right); \left( \frac{2}{3}; \frac{2}{3} \right); \left( \frac{2}{3}; \frac{2}{3} \right); \left( \frac{2}{3}; \frac{2}{3} \right)$$

52. («Физтех», 2019, 9) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + y + 2xy = 11, \\ 2x^2y + xy^2 = 15. \end{cases}$$

$$\left( \frac{2}{3}; \frac{2}{3} \right); \left( \frac{2}{3}; \frac{2}{3} \right); \left( \frac{2}{3}; \frac{2}{3} \right); \left( \frac{2}{3}; \frac{2}{3} \right)$$

53. («Физтех», 2016, 9–11)

$$\begin{cases} x^2y + xy^2 - 2x - 2y + 10 = 0, \\ x^3y - xy^3 - 2x^2 + 2y^2 - 30 = 0. \end{cases}$$

$$(-4, -1)$$

54. (МФТИ, 2006)

$$\begin{cases} 5\sqrt[3]{2x^2y^3} = 2(x^2 + y^2), \\ 3\sqrt[3]{4x^4y^3} = 4(y^2 - x^2). \end{cases}$$

$$(0, 0); (2, 4); (-2, 4)$$

55. (МФТИ, 2000)

$$\begin{cases} \frac{x^3}{2y} + 3xy = 25, \\ \frac{y^3}{x} - 2xy = 16. \end{cases}$$

$$(2, 4); (-2, -4)$$

56. (МФТИ, 2000)

$$\begin{cases} \frac{x^3}{y^2} + \frac{3y}{4x} = 2, \\ \frac{8y}{x^2} - \frac{6x}{y} = 5. \end{cases}$$

$$\left( \frac{256}{2048}; \frac{375}{5625} \right); (2, 4)$$

57. (МФТИ, 2005)

$$\begin{cases} 8x^2y - 3x^4 = 4, \\ 8y^3 - 3x^2y^2 = 2. \end{cases}$$

$$\left( \sqrt[2]{2}, 1 \right); \left( -\sqrt[2]{2}, 1 \right)$$

58. (МФТИ, 2006)

$$\begin{cases} \frac{y^2}{x^2}(3+2x) = 3y-x, \\ y^2 + 2xy = 3x^2 - 2y. \end{cases}$$

$$\left(-\frac{12}{8}, \frac{35}{2}; -\frac{7}{1}, \frac{7}{1}\right)$$

59. (МФТИ, 2004)

$$\begin{cases} y^7 + 2y^6 + 3x^2 = 0, \\ y^4 - xy = \frac{x^3}{y^4} - \frac{x^2}{y}. \end{cases}$$

$$\left(-125, -5; -3, -3\sqrt[6]{9}\right); \left(-3, -3\sqrt[6]{9}\right); \left(-3, -3\sqrt[6]{9}\right)$$

60. (МФТИ, 2002)

$$\begin{cases} y + \frac{x^3}{y^3} = \frac{y^3}{x} + \frac{x^2}{y}, \\ \frac{1}{y} + \frac{y^3}{x^3} + \frac{10}{x^2} = 0. \end{cases}$$

$$\{4, -2\}$$

61. (МФТИ, 2008)

$$\begin{cases} xy + y^2 - 2x^2 + 10x + 8y + 12 = 0, \\ x^2 - y^2 + 7 = 0. \end{cases}$$

$$\left(-3, 4\right); \left(\frac{3}{1}, -\frac{3}{8}\right); \left(\frac{3}{29}, -\frac{12}{43}\right); \left(\frac{12}{29}, -\frac{12}{43}\right)$$

62. (МФТИ, 1996)

$$\begin{cases} 2x^2 - xy - y^2 - 10x - 8y - 12 = 0, \\ 2x^2 + 3xy + y^2 + x - y - 6 = 0. \end{cases}$$

$$\left(3, -3\right); \left(2, -4\right); \left(0, -2\right)$$

63. («Покори Воробьёвы горы!», 2019, 10–11)

$$\begin{cases} \frac{1}{x-y\sqrt{2}} + \frac{1}{x\sqrt{2}-y} = 1, \\ \frac{1}{x\sqrt{2}+y} - \frac{1}{x+y\sqrt{2}} = -1. \end{cases}$$

$$\left(\frac{9}{\sqrt{5}-5}, \frac{9}{\sqrt{5}-5}\right); \left(\frac{9}{\sqrt{5}+5}, \frac{9}{\sqrt{5}+5}\right)$$

64. («Надежда энергетики», 2017, 8.1) Найдите числа  $x, y, z$  из уравнений

$$\begin{cases} 1 + x + y = xy, \\ 2 + y + z = yz, \\ 5 + z + x = zx. \end{cases}$$

(1, 2, 4) или (2, 0, 1)

65. («Курчатов», 2023, 8.3) Найдите все тройки положительных чисел  $(a, b, c)$ , удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} a + b = b^2 + c^2 + 2bc, \\ b + c = c^2 + a^2 + 2ac, \\ c + a = a^2 + b^2 + 2ab. \end{cases}$$

(1, 1, 1)

66. («Надежда энергетики», 2016, 7.4, 8.4) Числа  $x, y, z$  таковы, что отношения

$$\frac{x+y}{z}, \quad \frac{x+z}{y}, \quad \frac{y+z}{x}$$

принимают одинаковое значение. Найдите его

2 или 1

67. («Покори Воробьёвы горы!», 2019, 9.6) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 = y + z, \\ y^2 = z + x, \\ z^2 = x + y \end{cases}$$

при условии  $x, y, z > 0$ . В ответе укажите: если решений нет, то 0, если решение одно — произведение  $x y z$ , если решений несколько — сумму произведений  $x y z$  для каждого решения.

8

68. (МГУ, ВКНМ, 2000)

$$\begin{cases} 3x + y - z = 4, \\ x - 2y + 3z = 0, \\ x^2 + 2y + z^2 = 6x. \end{cases}$$

(1, 2, 1); (1, 2, 1); (14/28, 5/28, -5/28)

69. (ОММО, 2012)

$$\begin{cases} \frac{ab}{a+b} = 1, \\ \frac{bc}{b+c} = 2, \\ \frac{ca}{c+a} = 4. \end{cases}$$

$(8, \frac{8}{3}, \frac{8}{5})$

70. (Открытая олимпиада, 2017, 8.3) Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} xy = 6(x+y), \\ xz = 4(x+z), \\ yz = 2(y+z). \end{cases}$$

$\frac{1}{yz} = z, \frac{1}{xz} = \frac{1}{4} \Rightarrow z = x$  или  $0 = z = x$

71. (ОММО, 2018)

$$\begin{cases} x^2 = (y-z)^2 - 3, \\ y^2 = (z-x)^2 - 7, \\ z^2 = (x-y)^2 + 21. \end{cases}$$

$(9, -3, -1)$ ;  $(9, 3, 1)$

72. («Физтех», 2015, 10–11)

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y+z} = \frac{1}{12}, \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{x+z} = \frac{1}{6}, \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x+y} = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$(1, 2, 4)$

73. (МГУ, ИСАА, 2004)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = xyz, \\ y^2 + z^2 = xyz, \\ z^2 + x^2 = xyz. \end{cases}$$

$(2, 2, -2); (-2, -2, -2); (2, 2, 2); (2, 2, 2); (0, 0, 0)$

74. (ОММО, 2011)

$$\begin{cases} x + y + z = 13, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 61, \\ xy + xz = 2yz. \end{cases}$$

$(4, 3, 6); (4, 6, 3)$

75. (ОММО, 2017)

$$\begin{cases} x + y + 2 - 4xy = 0, \\ y + z + 2 - 4yz = 0, \\ z + x + 2 - 4zx = 0. \end{cases}$$

$$\left(\frac{z}{1} - \frac{z}{1} - \frac{z}{1} -\right) : (1 \cdot 1 \cdot 1)$$

76. («Физтех», 2009)

$$\begin{cases} x^2 - z^2 = 2x - 3y + 4z, \\ z^2 - y^2 = x + 4y - 3z, \\ y^2 - x^2 = -3x - 5y + z. \end{cases}$$

$$\left(\frac{x}{2x^2-1} - \frac{9}{2x^2-1} - \frac{9}{2x^2-1}\right) : \left(\frac{x}{2x^2+1} - \frac{9}{2x^2+1} - \frac{9}{2x^2+1}\right) : (z - 1 - 1) : (0 \cdot 0 \cdot 0)$$

77. («Физтех», 2009)

$$\begin{cases} 2x^2 = yz - 2x, \\ 2y^2 = -xz + 2y, \\ 2z^2 = -xy + 2z. \end{cases}$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\right) : \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{2} - \frac{1}{9}\right) : \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{9} - \frac{1}{2}\right) : (z \cdot z \cdot z) : (1 \cdot 0 \cdot 0) : (0 \cdot 1 \cdot 0) : (0 \cdot 0 \cdot 1) : (0 \cdot 0 \cdot 0)$$

78. (МФТИ, 2006)

$$\begin{cases} 2yz + \frac{3}{x} + 3 = 0, \\ xy + \frac{4}{z} - 2 = 0, \\ xz + \frac{2}{y} + 2 = 0. \end{cases}$$

$$(1 - z \cdot 3)$$

79. (МФТИ, 2003)

$$\begin{cases} 4zx^2 - yz^2 + 2xy^2 = 3xyz, \\ zy^2 + 2xz^2 - 4yx^2 = 3xyz, \\ 2xy - 2xz + yz = 3. \end{cases}$$

$$(z \cdot 1 \cdot \frac{z}{1}) : (z - 1 - \frac{z}{1}) : (1 - z - \frac{z}{1}) : (1 \cdot z \cdot \frac{z}{1}) : (1 \cdot 1 - 1) : (1 - 1 \cdot 1)$$

80. (МФТИ, 2001)

$$\begin{cases} 3x - y - 5z - 2yz = 0, \\ x - 5y - z - 2z^2 = 0, \\ x + 9y - 3z + 2xz = 0. \end{cases}$$

$$\left(\frac{z}{1} - \frac{9}{1} - \frac{9}{1}\right) : (1 - \frac{z}{1} - \frac{z}{1}) : (0 \cdot 0 \cdot 0)$$

81. (МФТИ, 2002)

$$\begin{cases} 3x^3 - 3y^3 + z^3 - xyz - 3 = 0, \\ 3y^3 - x^3 - z^3 - xyz + 5 = 0, \\ x^3 - y^3 + z^3 - xyz - 2 = 0. \end{cases}$$

$$\left( \frac{1}{6}\sqrt[3]{\frac{1}{6}}; \frac{1}{6}\sqrt[3]{\frac{1}{6}} - \frac{1}{6}\sqrt[3]{\frac{1}{6}}; - \right); \left( \frac{2}{6}\sqrt[3]{\frac{1}{6}}; -\frac{2}{6}\sqrt[3]{\frac{1}{6}} - \frac{1}{6}\sqrt[3]{\frac{1}{6}}; - \right)$$

82. (МФТИ, 2004)

$$\begin{cases} (x + y)^2 = 3 + 4z^2, \\ (2z - y)^2 = 4 + x^2, \\ (2z - x)^2 = 2 + y^2. \end{cases}$$

$$\left( \frac{2}{1}\sqrt[3]{\frac{9}{2}} - \frac{9}{6}; \frac{9}{6} \right); \left( \frac{2}{1}\sqrt[3]{\frac{9}{2}} - \frac{9}{6}; \frac{9}{6} \right)$$

83. («Физтех», 2009)

$$\begin{cases} (x - y)(x^2 + y^2) = 5, \\ (y + z)(y^2 + z^2) = 13, \\ (z - x)(x^2 + z^2) = 40. \end{cases}$$

$$\left( \frac{1}{3}\sqrt[3]{3}; -\frac{1}{3}\sqrt[3]{3} \right)$$

84. (МФТИ, 1991)

$$\begin{cases} 3xz + 1 = 4x + 3z, \\ 4xy - 3xz = 4y - 3z + 9, \\ xy - zy = x + 3 - 2z. \end{cases}$$

$$\left( \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}; \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{3}} \right); \left( \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}; \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{3}} \right)$$

85. («Высшая проба», 2015, 10) Найдите все тройки действительных чисел  $x, y, z$ , удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} x^3 y^3 z^3 = 1, \\ xy^5 z^3 = 2, \\ xy^3 z^5 = 3. \end{cases}$$

$$\left( \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}; \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}; \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{3}} \right); \left( \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}; \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}; \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{3}} \right); \left( \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}; \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}; \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{3}} \right); \left( \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}; \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}; \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{3}} \right)$$

86. («Высшая проба», 2017, 8) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x} = \frac{y+z}{2}, \\ \sqrt{y} = \frac{z+x}{2}, \\ \sqrt{z} = \frac{x+y}{2} \end{cases}$$

и доказать, что других решений, кроме найденных, нет.

$$\left( \frac{1}{3}\sqrt[3]{3}; \frac{1}{3}\sqrt[3]{3}; \frac{1}{3}\sqrt[3]{3} \right); \left( \frac{1}{3}\sqrt[3]{3}; \frac{1}{3}\sqrt[3]{3}; \frac{1}{3}\sqrt[3]{3} \right)$$

87. (МГУ, мехмат, 2002-03.5) Решить систему

$$\begin{cases} \frac{y}{x} - 9xy = 2, \\ \frac{z}{y} - 9yz = 6, \\ \frac{3x}{z} - 3zx = 2. \end{cases}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \text{ или } \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

88. (МГУ, мехмат, 2007.2) Графики функций

$$f(x) = 2x^2 - 2x - 1 \quad \text{и} \quad g(x) = -5x^2 + 2x + 3$$

пересекаются в двух точках. Найти коэффициенты  $a$  и  $b$  в уравнении прямой  $y = ax + b$ , проходящей через те же точки.

$$\frac{1}{1} + x \frac{1}{9} = 0$$

89. (МГУ, мехмат, 1977.4) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0, \\ z^3 - 9y^2 + 27y - 27 = 0, \\ x^3 - 9z^2 + 27z - 27 = 0. \end{cases}$$