Алгебраические преобразования

1. (*МГУ, ДВИ, 2014.1*) Найдите в явном виде натуральное число, заданное выражением

$$\sqrt{7-4\sqrt{3}}\left(8+4\sqrt{3}\right).$$

4

2. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11*) Сравните число

$$\sqrt{\left|8\sqrt{3}-16\right|}-\sqrt{8\sqrt{3}+16}$$

и наименьший корень уравнения $4x^2+21x+17=0$.

Число больше корня

3. (*«Ломоносов», 2019, 7–8.2*) Убедитесь, что $1009=15^2+28^2$, и представьте число 2018 в виде суммы двух квадратов натуральных чисел.

4. (*Всеросс., 2014, ШЭ, 8*) Замените в выражении $\left(x^3-2\right)^2+\left(x^2+*\right)^2$ звёздочку $(*)$ на одночлен так, чтобы после возведения в квадрат и приведения подобных слагаемых получилось четыре слагаемых.

5. (*Всеросс., 2016, ШЭ, 8*) Разность квадратов двух чисел равна 6, а если уменьшить каждое из этих чисел на 2, то разность их квадратов станет равна 18. Чему равна сумма этих чисел?

-2

6. (*ОММО, 2019*) При каком наименьшем натуральном k выражение $2017\cdot 2018\cdot 2019\cdot 2020+k$ является квадратом натурального числа?

7. (*ОММО, 2016, 9–10*) Про действительные числа x, y, z известно, что

$$xy+z=yz+x=zx+y.$$

Докажите, что какие-то два из чисел x, y, z равны.

8. (*ОММО, 2016, 11*) Представьте в виде несократимой дроби

$$7\frac{19}{2015}\times 6\frac{19}{2016}-13\frac{1996}{2015}\times 2\frac{1997}{2016}-9\times\frac{19}{2015}.$$

19/96

9. (*Всеросс., 2018, ШЭ, 9.5*) Числа a, b, c и d таковы, что $a+b=c+d\neq 0$, $ac=bd$. Докажите, что $a+c=b+d$.

10. (*Всеросс., 2016, ШЭ, 9*) На доске была написана несократимая дробь. Петя уменьшил её числитель на 1, а знаменатель на 2. А Вася прибавил к числителю 1, а знаменатель оставил без изменений. Оказалось, что в результате мальчики получили одинаковые значения. Какой именно результат у них мог получиться?

$\boxed{1}$

11. (*Всеросс., 2014, ШЭ, 9*) Замените в выражении $(x^4-3)^2+(x^3+*)^2$ звёздочку $(*)$ на одночлен так, чтобы после возведения в квадрат и приведения подобных слагаемых получилось четыре слагаемых.

12. (*Всеросс., 2014, МЭ, 8*) Про различные числа a и b известно, что

$$\frac{a}{b}+a=\frac{b}{a}+b.$$

Найдите $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$.

$\boxed{-1}$

13. (*Всеросс., 2016, МЭ, 9*) Известно, что $a^2+b=b^2+c=c^2+a$. Какие значения может принимать выражение

$$a(a^2-b^2)+b(b^2-c^2)+c(c^2-a^2)\,?$$

$\boxed{0}$

14. (*Всеросс., 2019, МЭ, 9.2*) Найдите все такие тройки чисел, что каждое число равно квадрату суммы двух остальных.

$\boxed{(0,0,0);\ (\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4})}$

15. (*«Ломоносов», 2014, 7–8*) Незнайка придумал фантастическое умножение $\circledast$, которое для любых x и y удовлетворяет аксиомам нуликативности:

$$x\circledast x=0$$

и тилимилитивности:

$$x\circledast(y\circledast z)=(x\circledast y)+z.$$

Помогите Знайке вычислить $1755\circledast 2014$.

$\boxed{-259}$

16. (*«Высшая проба», 2015, 8–9*) Числа x и y таковы, что $x+y=xy=17$. Найти значение выражения

$$(x^2-17x)\left(y+\frac{17}{y}\right).$$

$\boxed{-289}$

17. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2019, 7–8.6*) Разложите на множители многочлен x^4+3x^2+4. В ответе укажите сумму коэффициентов получившихся множителей.

$\boxed{6}$

18. (*«Курчатов», 2018, 9.2*) Петя и Вася загадали по два действительных числа и сообщили их Маше. Оказалось, что сумма чисел, загаданных Петей, равна произведению чисел, загаданных Васей, и что произведение чисел, загаданных Петей, равно сумме чисел, загаданных Васей. Маша прибавила ко всем четырем числам по единице и перемножила. Мог ли у Маши получиться отрицательный результат?

19. (*«Курчатов», 2018, 9.3*) Вычислите значение выражения

$$\frac{(3^4+4)\,(7^4+4)\,(11^4+4)\ldots(2015^4+4)\,(2019^4+4)}{(1^4+4)\,(5^4+4)\,(9^4+4)\ldots(2013^4+4)\,(2017^4+4)}.$$

$\boxed{4080401}$

20. (*«Курчатов», 2019, 9.4*) Известно, что число 400000001 является произведением двух простых чисел p и q. Найдите сумму натуральных делителей числа $p+q-1$.

$\boxed{45864}$

21. (*«Курчатов», 2019, 9, 10*) Положительные числа a, b и c таковы, что выполнены равенства

$$a^2+ab+b^2=1, \quad b^2+bc+c^2=3, \quad c^2+ca+a^2=4.$$

Найдите $a+b+c$.

$\boxed{\sqrt{7}}$

22. (*«Ломоносов», 2013, 9*) Доказать, что если числа x, y и z — целые, то число

$$\frac{1}{2}\left((x-y)^4+(y-z)^4+(z-x)^4\right)$$

является квадратом некоторого целого числа.

23. (*ММО, 2019, 9.4*) Каждый отрезок с концами в вершинах правильного 100-угольника покрасили — в красный цвет, если между его концами четное число вершин, и в синий — в противном случае (в частности, все стороны 100-угольника красные). В вершинах расставили числа, сумма квадратов которых равна 1, а на отрезках — произведения чисел в концах. Затем из суммы чисел на красных отрезках вычли сумму чисел на синих. Какое наибольшее число могло получиться?

24. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 10–11*) Найдите значение выражения

$$\left(\frac{3}{2x-y}-\frac{2}{2x+y}-\frac{1}{2x-5y}\right):\frac{y^2}{4x^2-y^2}$$

при $x=\frac{4}{3}$, $y=\frac{7}{3}$.

$\boxed{\frac{3}{8}}$

25. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2019, 10–11*) Найдите десятичную запись числа

$$\frac{(2x-x^2)\cdot 10^6}{33}+\left(\sqrt[3]{2}+1\right)\left(\sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{2}-1}{3}}\right),$$

если $x = 0{,}9999$.

$\boxed{30304{,}03}$

26. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11*) Можно ли представить выражение

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)-(ax+bz)^2-(by-cx)^2-(cz+ay)^2$$

в виде квадрата некоторого многочлена от переменных a, b, c, x, y, z?

$\boxed{\text{Да}}$

27. (*«Высшая проба», 2019, 10–11*) Про вещественные числа a, b и c известно, что

$$abc+a+b+c=10 \quad \text{и} \quad ab+bc+ac=9.$$

Для каких чисел x можно утверждать, что хотя бы одно из чисел a, b, c равно x? (Найдите все такие числа x и докажите, что других нет.)

28. (*«Высшая проба», 2015, 11*) Действительные числа x, y, z выбираются так, что выполняются равенства $xy+yz+zx=4$, $xyz=6$. Доказать, что при любом таком выборе значение выражения

$$\left(xy-\frac{3}{2}(x+y)\right)\left(yz-\frac{3}{2}(y+z)\right)\left(zx-\frac{3}{2}(z+x)\right)$$

является одним и тем же числом, и найти это число.

$\boxed{\frac{81}{4}}$

29. (*«Ломоносов», 2005*) Вычислите

$$\frac{2xy(x^3+y^3)}{x^2-xy+y^2}+\frac{(x+y)(x^4-y^4)}{x^2-y^2}$$

при $x=-1,\underbrace{6\ldots6}_{44}7$ и $y=-1,\underbrace{3\ldots3}_{45}$.

$\boxed{-27}$

30. (*«Ломоносов», 2008*) Найдите k, если

$$4-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{2k-\sqrt{3}}}}=2-\sqrt{3}.$$

$\boxed{1}$

31. (*«Курчатов», 2018, 11*) Приведите пример натуральных чисел a и b таких, что

$$\frac{a^2+a+1}{b^2+b+1} = 2018^2 + 2018 + 1.$$

32. (*Всеросс., 2015, финал, 10*) Назовём натуральное число *почти квадратом*, если оно равно произведению двух последовательных натуральных чисел. Докажите, что каждый почти квадрат можно представить в виде частного двух почти квадратов.

Олимпиада им. Леонарда Эйлера

19.R.6. Сумма четырех целых чисел равна 0. Числа расставили по кругу и каждое умножили на сумму двух его соседей. Докажите, что сумма этих четырех произведений, умноженная на -1, равна удвоенному квадрату целого числа.

19.F.1. Даны два числа (не обязательно целые), не равные 0. Если каждое из них увеличить на единицу, их произведение увеличится вдвое. А во сколько раз увеличится их произведение, если каждое из исходных чисел возвести в квадрат и затем уменьшить на единицу?

18.R.2. Даны два ненулевых числа. Если к каждому из них прибавить единицу, а также из каждого из них вычесть единицу, то сумма обратных величин четырёх полученных чисел будет равна 0. Какое число может получиться, если из суммы исходных чисел вычесть сумму их обратных величин? Найдите все возможности.

18.F.5. Целые числа a, b, c и натуральное число n таковы, что $a+b+c=1$ и $a^2+b^2+c^2=2n+1$. Докажите, что $a^3+b^2-a^2-b^3$ делится на n.

16.R.6. Найдите все натуральные числа, которые можно представить в виде

$$\frac{xy+yz+zx}{x+y+z},$$

где x, y и z — три различных натуральных числа.

15.R.1. На доске написаны четыре числа, ни одно из которых не равно 0. Если каждое из них умножить на сумму трёх остальных, получатся четыре одинаковых результата. Докажите, что квадраты записанных на доске чисел равны.

13.R.4. Существуют ли шесть различных натуральных чисел a, b, c, d, e, f таких, что справедливо равенство

$$(a+b+c+d+e+f) : \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}+\frac{1}{f}\right) = 2012\,?$$

12.F.6. Существуют ли такие различные натуральные числа a, b и c, что число $a+\frac{1}{a}$ равно полусумме чисел $b+\frac{1}{b}$ и $c+\frac{1}{c}$?

11.F.2. Про три положительных числа известно, что если выбрать одно из них и прибавить к нему сумму квадратов двух других, то получится одна и та же сумма, независимо от выбранного числа. Докажите, что какие-то два из исходных чисел совпадают.

11.F.1. Докажите, что для любого натурального числа $n > 1$ найдутся такие натуральные числа a, b, c, d, что $a + b = c + d = ab - cd = 4n$.

10.F.7. Докажите, что для произвольных a, b, c равенство

$$\frac{a(b-c)}{b+c} + \frac{b(c-a)}{c+a} + \frac{c(a-b)}{a+b} = 0$$

выполнено тогда и только тогда, когда выполнено равенство

$$\frac{a^2(b-c)}{b+c} + \frac{b^2(c-a)}{c+a} + \frac{c^2(a-b)}{a+b} = 0.$$

09.R.6. В трёх клетках клетчатого листа записаны числа, а остальные клетки пусты. Разрешается выбрать два числа из разных непустых клеток и записать в пустую клетку их сумму; также можно выбрать числа a, b, c из трёх разных непустых клеток и записать в пустую клетку число $ab + c^2$. Докажите, что при помощи нескольких таких операций можно записать в одну из клеток квадрат суммы трёх исходных чисел (какими бы они ни были).

09.F.2. При всяком ли натуральном n, большем 2009, из дробей $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n-1}$, $\frac{3}{n-2}$, $\ldots$, $\frac{n-1}{2}$, $\frac{n}{1}$ можно выбрать две пары дробей с одинаковыми суммами?