

## Тригонометрия и векторы

Дадим альтернативное решение задачи, которая предлагалась 11-классникам в 2023 году на Всесибирской олимпиаде по математике.

ЗАДАЧА. (Всесиб., 2023, 11.2) Тройка действительных чисел  $A, B, C$  такова, что

$$\sin A + \sin B + \sin C = 0 \quad \text{и} \quad \cos A + \cos B + \cos C = 0.$$

Найти значение выражения  $\cos(A - B) + \cos(B - C) + \cos(C - A)$ .

**Авторское решение** опирается на рутинные тригонометрические преобразования, ну а мы пойдем другим путем: используем векторы! С их помощью мы проясним геометрическую суть задачи и получим ответ почти без вычислений.

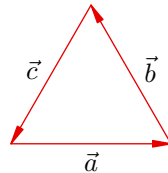
РЕШЕНИЕ. Рассмотрим прямоугольную декартову систему координат  $Oxy$  и единичную тригонометрическую окружность  $x^2 + y^2 = 1$ . Теми же буквами  $A, B, C$  обозначим точки тригонометрической окружности, отвечающие углам  $A, B, C$ . Рассмотрим единичные векторы

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \overrightarrow{OA} = (\cos A, \sin A), \\ \vec{b} &= \overrightarrow{OB} = (\cos B, \sin B), \\ \vec{c} &= \overrightarrow{OC} = (\cos C, \sin C).\end{aligned}$$

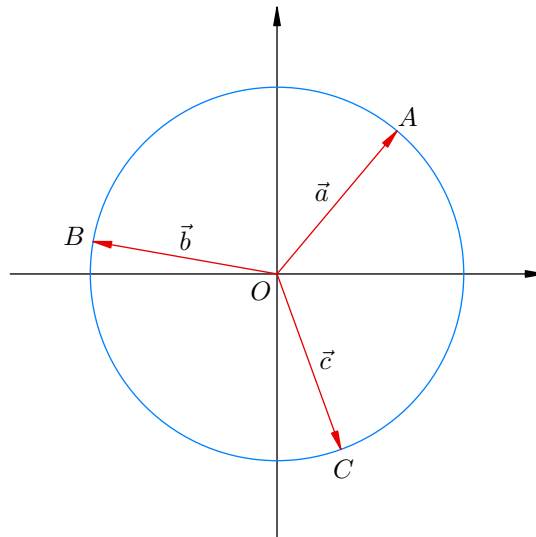
Имеем:

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\cos A + \cos B + \cos C, \sin A + \sin B + \sin C) = \vec{0},$$

то есть векторы  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  образуют треугольник. Ну а поскольку длины всех векторов одинаковы (равны единице), то этот треугольник — равносторонний:



Следовательно, на тригонометрической окружности точки  $A, B, C$  располагаются в вершинах равностороннего треугольника (по часовой стрелке или против часовой — не важно):



Каждая из дуг  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  равна  $\frac{2\pi}{3}$ , и решение задачи легко заканчивается:

$$\cos(A - B) + \cos(B - C) + \cos(C - A) = \cos \frac{2\pi}{3} + \cos \frac{2\pi}{3} + \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}.$$

## Авторское решение

([Ссылка на оригинальный файл Всесиба](#))

**11.2.** Тройка действительных чисел  $A, B, C$  такова, что  $\sin A + \sin B + \sin C = 0$  и

$\cos A + \cos B + \cos C = 0$ . Найти значение выражения

$\cos(A - B) + \cos(B - C) + \cos(C - A)$ .

**Ответ.**  $-\frac{3}{2}$ .

**Решение.** Возведём два первых выражения в квадрат, получим  
 $(\sin A + \sin B + \sin C)^2 = \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C + 2(\sin A \cdot \sin B + \sin B \cdot \sin C + \sin A \cdot \sin C) = 0$

---

и  $(\cos A + \cos B + \cos C)^2 = \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C +$   
 $+ 2(\cos A \cdot \cos B + \cos B \cdot \cos C + \cos A \cdot \cos C) = 0$ . Складывая полученные выражения,  
имеем

$$3 + 2(\sin A \cdot \sin B + \sin B \cdot \sin C + \sin A \cdot \sin C + \cos A \cdot \cos B + \cos B \cdot \cos C + \cos A \cdot \cos C) = 0.$$

Учитывая равенства

$$\sin A \cdot \sin B + \cos A \cdot \cos B = \cos(A - B), \sin A \cdot \sin C + \cos A \cdot \cos C = \cos(C - A), \text{ и}$$

$$\sin B \cdot \sin C + \cos B \cdot \cos C = \cos(B - C), \text{ получим}$$

$$3 + 2(\cos(A - B) + \cos(B - C) + \cos(C - A)) = 0, \text{ откуда}$$

$$\cos(A - B) + \cos(B - C) + \cos(C - A) = -\frac{3}{2}.$$