

Одноклассники ели торт

На школьном этапе Всероссийса по математике (2021/22 год, Москва) шестиклассникам была предложена следующая [задача 6.5](#).

ЗАДАЧА. Несколько одноклассников вместе съели торт. Лёша съел больше всех — $\frac{1}{11}$ от всего торта, а Алёна — меньше всех — $\frac{1}{14}$ от всего торта. Сколько одноклассников ели торт? Укажите все возможные варианты.

Посмотрим на [официальное решение](#). На мой взгляд, оно совсем скучное — шестиклассников такими текстами только морить можно:

Ответ: 12 или 13.

Решение. Если бы все в классе съели по $\frac{1}{11}$ торта, как Лёша, то человек в классе было бы 11. Но так как каждый, кроме Лёши, съел меньше $\frac{1}{11}$, то всего людей больше 11, то есть хотя бы 12.

Аналогичными соображениями покажем, что людей не больше 13. Если бы все в классе съели по $\frac{1}{14}$ торта, как Алёна, то человек в классе было бы 14. Но так как все, кроме Алёны, съели больше $\frac{1}{14}$, то всего людей меньше 14, то есть не больше 13.

Осталось два возможных варианта: 12 и 13. Покажем, что они оба возможны.

После того, как Лёша взял $\frac{1}{11}$ торта, а Алёна взяла $\frac{1}{14}$ торта, всё оставшееся мы раздадим поровну всем остальным (остальных — 10 или 11 человек). Поймём, почему каждому из них достанется менее $\frac{1}{11}$ торта, но более $\frac{1}{14}$ торта.

Предположим, что каждому из остальных досталось не менее $\frac{1}{11}$ торта. Кроме Алёны человек в классе не менее 11, каждый из них съел суммарно не менее $\frac{1}{11}$ торта. Тогда суммарно все, кроме Алёны, съели не менее $\frac{11}{11} = 1$, то есть целый торт. Но тогда Алёне бы ничего не досталось, противоречие. Значит, всем остальным досталось менее $\frac{1}{11}$ торта.

Предположим, что каждому из остальных досталось не более $\frac{1}{14}$ торта. Кроме Лёши человек в классе не более 12, каждый из них съел суммарно не более $\frac{1}{14}$ торта. Тогда суммарно все, кроме Лёши, съели не более $\frac{12}{14} = \frac{6}{7}$ торта. Тогда оставшиеся не менее $\frac{1}{7}$ торта должен съесть Лёша, но он съел всего лишь $\frac{1}{11} < \frac{1}{7}$, противоречие. Значит, всем остальным досталось более $\frac{1}{14}$ торта. \square

Придумаем что-нибудь повеселее.

РЕШЕНИЕ. Без ограничения общности считаем, что торт весил $11 \cdot 14 = 154$ кг. Тогда Лёша съел 14 кг, Алёна — 11 кг.

Остальных одноклассников Лёши и Алёны, поедавших торт, покрасим в красный цвет. Получается, что все красные дети суммарно съели $154 - 14 - 11 = 129$ кг. При этом каждый красный ребенок съел больше 11 кг, но меньше 14 кг.

Подумаем, сколько могло быть красных детей. Предположим, что их не более 9. Тогда какой-то красный ребенок (пусть это Петя) съел не меньше, чем $129/9$ кг. Но

$$\frac{129}{9} > \frac{126}{9} = 14,$$

то есть Петя съел больше 14 кг. Противоречие. Значит, красных детей не менее 10.

Теперь предположим, что красных детей не менее 12. Тогда какой-то красный ребенок (пусть это Вася) съел не больше, чем $129/12$ кг. Но

$$\frac{129}{12} < \frac{132}{12} = 11,$$

то есть Вася съел меньше 11 кг. Противоречие. Значит, красных детей не более 11.

Итак, для количества красных детей остаются лишь два варианта: 10 и 11. Покажем, что оба они могут реализоваться.

- Пусть число красных детей равно 10. Скормим каждому из них по $129/10 = 12,9$ кг. Это больше 11 и меньше 14 кг. Всё ок.
- Пусть число красных детей равно 11. Скормим каждому из них по $129/11$ кг. Имеем:

$$\frac{129}{11} > \frac{121}{11} = 11$$

и в то же время

$$\frac{129}{11} < \frac{154}{11} = 14.$$

Всё ок.

Прибавляя к красным детям Лешу и Алену, заключаем, что торт ели 12 или 13 человек.