

Задача про викторину на ЕГЭ по математике

Открытый банк задач ЕГЭ по математике содержит [несколько задач про викторину](#). Первая задача этого набора клонов (номер 508866 в банке) решена Анной Малковой на [сайте ЕГЭ-Студии](#) (под номером 10). Мы попробуем рассмотреть общую ситуацию.

ЗАДАЧА. В викторине участвуют n команд. Все команды разной силы, и в каждой встрече выигрывает та команда, которая сильнее. В первом раунде встречаются две случайно выбранные команды. Ничья невозможна. Проигравшая команда выбывает из викторины, а победившая команда играет со следующим случайно выбранным соперником. Известно, что в первых k играх победила команда А. Какова вероятность того, что эта команда выигрывает $(k + 1)$ -й раунд?

Немного о понятии вероятностного пространства. Чтобы в той или иной задаче математически строго говорить о вероятности и чётко осознавать, что именно мы в качестве вероятности вычисляем, необходимо описать *вероятностное пространство* данной задачи. Для этого в общем случае следует сделать три вещи.

1. Нужно ввести *множество элементарных событий* Ω , элементами которого служат исходы эксперимента, выпадения жребия и т. д.

Что именно будет элементарным событием — определяется конкретной задачей. Если, например, мы подбрасываем монету и нас интересует вероятность выпадения орла, то элементарное событие — это результат отдельного броска (О или Р); в данном случае $\Omega = \{O, P\}$ и $|\Omega| = 2$. Если же мы задаёмся вопросом, с какой вероятностью выпадут ровно три решки при пяти подбрасываниях, то множество Ω состоит из всевозможных пятибуквенных слов (скажем, ОРООР), составленных из букв О и Р; в данном случае $|\Omega| = 2^5 = 32$. (Напомним, что через $|X|$ обозначается число элементов конечного множества X .)

2. Нужно договориться, что мы считаем *событием*. Вообще, событие — это некоторая совокупность элементарных событий; иными словами, событие A есть некоторое подмножество множества Ω . В ряде ситуаций любое подмножество $A \subset \Omega$ является событием, но так бывает не всегда. Например, в вышеописанном случае пяти подбрасываний монеты любое пятибуквенное слово из букв О и Р служит событием; а вот в задачах на геометрическую вероятность (где вероятность определяется как отношение площадей) событиями могут служить лишь *измеримые* множества (у которых в принципе можно вычислить площадь).
3. Нужно указать, каким образом мы вычисляем вероятности событий, то есть каким образом мы сопоставляем произвольному событию A число $p(A) \in [0; 1]$. Разумеется, вероятность достоверного события Ω должна равняться единице, вероятность невозможного события \emptyset — нулю, а вероятность объединения двух (и даже счётного числа) непересекающихся событий — сумме вероятностей этих событий¹.

Простым примером вероятностного пространства является так называемая *классическая вероятностная модель*. В рамках этой модели вышеперечисленные три пункта конкретизируются следующим образом.

¹Похоже на площадь, не правда ли? Эта аналогия не случайна. На самом деле и вероятность, и площадь являются частными случаями общего понятия *меры*; оно изучается в разделе математики, который называется *теория меры*. Один знакомый математик любил говорить, что «нет никакой теории вероятностей, есть теория меры».

1. Множество элементарных событий Ω конечно: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$.
2. Событием является любое подмножество A множества Ω .
3. Все элементарные события ω_i в условиях данной задачи можно считать равновероятными, и им приписывается вероятность $\frac{1}{n} = \frac{1}{|\Omega|}$. Если событие A состоит из m элементарных событий, то вероятность $p(A)$ события A определяется по формуле

$$p(A) = \frac{m}{n} = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Так, в задаче о вероятности выпадения ровно трёх решек при пяти подбрасываниях работает классическая вероятностная модель. Про множество Ω этой задачи мы уже сказали. Интересующее нас событие A состоит из всех пятибуквенных слов, в которых три буквы Р и две буквы О. Таких слов $C_5^3 = 10$, и потому вероятность события A равна $\frac{C_5^3}{2^5} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$.

Немного о понятии условной вероятности. Условная вероятность понадобится нам далее при решении задачи. Для лучшего понимания условной вероятности стоит прежде всего разобрать отличный [пример из Википедии](#) про две шестигранные кости, в котором данное понятие иллюстрируется весьма наглядным образом.

По определению, условная вероятность события A при условии события B равна

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}.$$

Поясним на примере классической вероятностной модели, откуда такая формула берётся. Говоря об условной вероятности A при условии B , мы «сужаем» множество элементарных событий с Ω до B (ведь остальные элементарные события помимо B нас уже не интересуют) и рассматриваем событие $A \cap B$ в новом «суженном» вероятностном пространстве B (в примере из Википедии хорошо видно это сужение с 36 случаев до 10). Тогда

$$p(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{\frac{|A \cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|B|}{|\Omega|}} = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}.$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ. Пусть силы команд равны $1, 2, \dots, n$ (чем больше сила команды, тем она сильнее). Опишем множество элементарных событий Ω .

Вначале выберем случайно одну команду; пусть её сила равна m . Затем определим ей по жребию *турнирный путь*, то есть последовательность команд-соперников во всех раундах: в первом раунде команда m играет с командой силой s_1 , во втором — с командой s_2, \dots , в последнем $(n-1)$ -м раунде — с командой s_{n-1} . Разумеется, команда m не обязательно пройдёт намеченный жребием турнирный путь до конца: если окажется, что $m < s_i$, то команда m проигрывает в i -м раунде и выбывает (её турнирный путь на этом прерывается).

Таким образом, турнирный путь команды m можно представить как упорядоченный набор $(m, s_1, s_2, \dots, s_{n-1})$, который является перестановкой чисел $1, 2, \dots, n$. Элементарными событиями служат всевозможные турнирные пути всех команд, то есть всевозможные упорядоченные наборы $(m, s_1, s_2, \dots, s_{n-1})$, то есть просто все перестановки чисел $1, 2, \dots, n$.

Итак, Ω есть множество всех перестановок чисел $1, 2, \dots, n$, так что $|\Omega| = n!$. Все эти перестановки, очевидно, равновероятны, так что задача решается в рамках классической вероятностной модели.

Обозначим через V_k следующее событие: «случайно выбранная вначале команда побеждает в k -м раунде». Событие V_k состоит из всех турнирных путей $(m, s_1, s_2, \dots, s_{n-1})$, для которых

выполнены неравенства $m > s_1, m > s_2, \dots, m > s_k$. В задаче требуется найти условную вероятность

$$p(V_{k+1}|V_k) = \frac{p(V_{k+1} \cap V_k)}{p(V_k)}.$$

При этом, очевидно, $V_{k+1} \cap V_k = V_{k+1}$, поскольку $V_{k+1} \subset V_k$ (ведь победа в $(k+1)$ -м раунде возможна только при условии победы в предыдущем k -м раунде). Следовательно,

$$p(V_{k+1}|V_k) = \frac{p(V_{k+1})}{p(V_k)}. \quad (1)$$

По формуле полной вероятности имеем:

$$p(V_k) = \sum_{m=1}^n p(m)p(V_k|m),$$

где $p(m) = \frac{1}{n}$ — вероятность того, что случайно выбранная вначале команда имеет силу m , $p(V_k|m)$ — вероятность победы в k -м раунде команды с силой m . Ясно, что при $m \leq k$ у команды m нет шансов победить в k -м раунде (то есть $p(V_k|m) = 0$), так что

$$p(V_k) = \frac{1}{n} \sum_{m=k+1}^n p(V_k|m). \quad (2)$$

Вычислим вероятность $p(V_k|m)$ при $m \geq k+1$. Соответствующее событие состоит из всех турнирных путей

$$(m, s_1, \dots, s_k, s_{k+1}, \dots, s_{n-1}) \quad (3)$$

с фиксированным m , для которых выполнены неравенства $m > s_1, m > s_2, \dots, m > s_k$ (не путать с событием V_k , в котором m не фиксировано). Подсчитаем количество таких путей.

На место чисел s_1, \dots, s_k можно поставить любую упорядоченную выборку из множества $\{1, 2, \dots, m-1\}$; количество таких выборок равно

$$(m-1)(m-2)\dots(m-k) = C_{m-1}^k \cdot k!$$

(в справедливости последнего равенства нетрудно убедиться непосредственно, но и комбинаторный смысл его тоже ясен: взяли неупорядоченную выборку C_{m-1}^k способами и превратили её в упорядоченную $k!$ способами). На позиции s_{k+1}, \dots, s_{n-1} ставим оставшиеся $n-1-k$ чисел в произвольном порядке; это можно сделать $(n-1-k)!$ способами. Итого искомое количество путей (ведущих команду m к выигрышу в k -м раунде) равно

$$C_{m-1}^k \cdot k!(n-1-k)!$$

Общее количество путей (3) с какими угодно s_1, \dots, s_{n-1} равно $(n-1)!$, поэтому

$$p(V_k|m) = \frac{C_{m-1}^k \cdot k!(n-1-k)!}{(n-1)!} = \frac{C_{m-1}^k}{C_{n-1}^k}. \quad (4)$$

Этот результат интуитивно очевиден (если вдуматься). Подставляем его в (2):

$$p(V_k) = \frac{1}{n} \sum_{m=k+1}^n \frac{C_{m-1}^k}{C_{n-1}^k} = \frac{1}{nC_{n-1}^k} (C_k^k + C_{k+1}^k + \dots + C_{n-1}^k).$$

Данная формула решает задачу. Действительно, остаётся написать

$$p(V_{k+1}) = \frac{1}{nC_{n-1}^{k+1}} (C_{k+1}^{k+1} + C_{k+2}^{k+1} + \dots + C_{n-1}^{k+1})$$

и воспользоваться формулой (1) для получения окончательного результата:

$$p(V_{k+1}|V_k) = \frac{C_{n-1}^k C_{k+1}^{k+1} + C_{k+2}^{k+1} + \dots + C_{n-1}^{k+1}}{C_{n-1}^{k+1} C_k^k + C_{k+1}^k + \dots + C_{n-1}^k}. \quad (5)$$

При $n = 6$, $k = 3$ (случай задачи 508866 открытого банка) из формулы (5) получаем :

$$p(V_4|V_3) = \frac{C_5^3 C_4^4 + C_5^4}{C_5^4 C_3^3 + C_4^3 + C_5^3} = \frac{10}{5} \frac{1+5}{1+4+10} = \frac{4}{5},$$

как и у [Анны Малковой](#).

Замечание. Формулу (4) можно получить несколько иначе. Перед первым раундом у команды m имеется $n - 1$ соперников, из которых $m - 1$ слабее её; поэтому вероятность победы команды m в первом раунде равна

$$p(V_1|m) = \frac{m - 1}{n - 1}.$$

Если команда m победила в первом раунде и прошла во второй, то у неё теперь $n - 2$ соперников, из которых $m - 2$ слабее её. Вероятность победить во втором раунде *при условии победы в первом раунде* равна $\frac{m-2}{n-2}$; умножая на вероятность прохода во второй раунд, получим

$$p(V_2|m) = \frac{m - 1}{n - 1} \cdot \frac{m - 2}{n - 2}.$$

Продолжая эти рассуждения, приходим к формуле

$$p(V_k|m) = \frac{(m - 1)(m - 2) \dots (m - k)}{(n - 1)(n - 2) \dots (n - k)},$$

что как раз и равно C_{m-1}^k / C_{n-1}^k .