Четыре точки на окружности

Три точки, не лежащие на одной прямой, всегда лежат на одной окружности (так как около любого треугольника можно описать окружность). А вот четыре точки в общем положении уже не обязаны располагаться на одной окружности. Если в сложной геометрической задаче удаётся установить, что какие-то четыре точки лежат на одной окружности, то это зачастую оказывается существенным продвижением к решению. Поэтому нужно свободно владеть свойствами и признаками расположения четырёх точек на окружности.

Рассмотрим четырёхугольник $ABCD$. Для того, чтобы его вершины были расположены на одной окружности, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих равенств:

(1) $\angle ABD = \angle ACD$;
(2) $\angle A + \angle C = 180°$;
(3) $KA \cdot KC = KB \cdot KD$, где K — точка пересечения диагоналей;
(4) $MA \cdot MB = MD \cdot MC$, где M — точка пересечения прямых AB и CD.

Задача 1. Докажите достаточность равенств (1) и (4).

Задача 2. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 8–9*) Петя хотел нарисовать правильный треугольник ABC. Но, поскольку он рисовал неточно, получился треугольник с углами $\angle A = 59°$ и $\angle B = 63°$. Потом Петя провёл высоты CE и BD, но, поскольку угольник был слегка перекошен, получил углы $\angle ADB = \angle AEC = 92°$. Найдите градусную меру угла AED.

$\boxed{58°}$

Задача 3. (*«Высшая проба», 2018, 7–8.4*) Пусть дан четырехугольник $ACDE$, такой что вершины D и E лежат по одну сторону от прямой AC. Пусть на стороне AC взята точка B, так что треугольник BCD — равнобедренный с основанием BC, т. е. $BD = CD$. Пусть углы BDC, ABE, ADE равны 80 градусов. Найдите угол EAD.

$\boxed{50°}$

Задача 4. (*МГУ, ДВИ, 2011.5*) Медианы AL и BM треугольника ABC пересекаются в точке K. Найдите длину отрезка CK, если $AB = \sqrt{3}$ и известно, что вокруг четырехугольника $KLCM$ можно описать окружность.

$\boxed{1}$

Задача 5. (*МГУ, ДВИ, 2012.6*) Окружность касается сторон AB и BC треугольника ABC в точках D и E, соответственно, и пересекает сторону AC в точках F, G (точка F лежит между точками A и G). Найдите радиус этой окружности, если известно, что $AF = 5$, $GC = 2$, $AD : DB = 2 : 1$ и $BE = EC$.

$\boxed{\sqrt{10}}$

Задача 6. (*МГУ, мехмат, 2001-07.3*) Через вершины A, B, C параллелограмма $ABCD$ со сторонами $AB = 3$ и $BC = 5$ проведена окружность, пересекающую прямую BD в точке E, причем $BE = 9$. Найти диагональ BD.

$\boxed{\frac{34}{9}}$

Задача 7. (*«Физтех», 2013*) В параллелограмме $ABCD$ угол ADC равен $\arcsin \frac{\sqrt{24}}{5}$. Окружность Ω, проходящая через точки A, C и D, пересекает стороны AB и BC в точках N и L соответственно, причём $AN = 11$, $BL = 6$. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$ и радиус окружности Ω.

$\boxed{S = 60\sqrt{6},\ R = \frac{5\sqrt{265}}{4\sqrt{6}}}$

Задача 8. (*МГУ, мехмат, 2000-05.3*) Окружность, проходящая через вершины B, C и D параллелограмма $ABCD$, касается прямой AD и пересекает прямую AB в точках B и E. Найти длину отрезка AE, если $AD = 4$ и $CE = 5$.

$\boxed{\frac{16}{5}}$

Задача 9. (*МГУ, мехмат, 2001-03.3*) В трапеции $ABCD$ с боковой стороной $CD = 30$ диагонали пересекаются в точке E, а углы AED и BCD равны. Окружность радиуса 17, проходящая через точки C, D и E, пересекает основание AD в точке F и касается прямой BF. Найти высоту трапеции и ее основания.

$\boxed{\frac{450}{17};\ \frac{255}{8},\ \frac{960}{17}}$

Задача 10. (*МГУ, мехмат, 2001-05.3*) Две окружности с центрами O и Q, пересекающиеся друг с другом в точках A и B, пересекают биссектрису угла OAQ в точках C и D соответственно. Отрезки OQ и AD пересекаются в точке E, причем площади треугольников OAE и QAE равны 18 и 42 соответственно. Найти площади четырехугольника $OAQD$ и отношение $BC : BD$.

$\boxed{200;\ 3:7}$

Задача 11. (*МГУ, мехмат, 2003-05.3*) В треугольнике ABC с углом $\angle B = 50^\circ$ и стороной $BC = 3$ на высоте BH взята такая точка D, что $\angle ADC = 130^\circ$ и $AD = \sqrt{3}$. Найти угол между прямыми AD и BC, а также $\angle CBH$.

$\boxed{90^\circ;\ 20^\circ}$

Задача 12. (*МГУ, мехмат, 2007.4*) Точки A, B, C лежат на окружности радиуса 2 с центром O, а точка K — на прямой, касающейся этой окружности в точке B, причем $\angle AKC = 46^\circ$, а длины отрезков AK, BK, CK образуют возрастающую геометрическую прогрессию (в указанном порядке). Найти угол AKO и расстояние между точками A и C. Какой из углов больше: ACK или AOK?

$\boxed{23^\circ,\ 4\sin 67^\circ,\ \text{одинаковы}}$

Задача 13. (*МГУ, мехмат, 2003-07.4*) Через вершины A и B треугольника ABC проведена окружность, касающаяся прямой BC, а через вершины B и C — другая окружность, касающаяся прямой AB. Продолжение общей хорды BD этих окружностей пересекает отрезок AC в точке E, а продолжение хорды AD одной окружности пересекает другую окружность в точке F. Найти отношение $AE : EC$, если $AB = 5$ и $BC = 9$. Сравнить площади треугольника ABC и ABF.

$\boxed{25:81;\ \text{одинаковы}}$

Задача 14. (*МГУ, мехмат, 2002-07.4*) Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ точка X лежит на стороне AD, причем $BX \parallel CD$ и $CX \parallel BA$. Найти BC, если $AX = \frac{3}{2}$ и $DX = 6$.

$\boxed{3}$

Задача 15. (*МГУ, мехмат, 1999-03.4*) Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E, $AB = AD$, CA — биссектриса угла C, $\angle BAD = 140^\circ$, $\angle BEA = 110^\circ$. Найти угол CDB.

$\boxed{50^\circ}$

Задача 16. (*МГУ, мехмат, 1999-05.4*) Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку B проведена прямая, пересекающая окружности в точках C и D, лежащих по разные стороны от прямой AB. Касательные к этим окружностям в точках C и D пересекаются в точке E. Найти AE, если $AB = 10$, $AC = 16$, $AD = 15$.

$\boxed{24}$

Задача 17. (*МГУ, мехмат, 1999-07.4*) В трапеции $ABCD$ с боковыми сторонами $AB = 9$ и $CD = 5$ биссектриса угла D пересекает биссектрисы углов A и C в точках M и N соответственно, а биссектриса угла B пересекает те же две биссектрисы в точках L и K, причем точка K лежит на основании AD.

а) В каком отношении прямая LN делит сторону AB, а прямая MK — сторону BC?

б) Найти отношение $MN : KL$, если $LM : KN = 3 : 7$.

$\boxed{\text{а) } 1 : 1,\ 5 : 9;\ \text{б) } 5 : 21}$

Задача 18. (*МГУ, мехмат, 2000-07.4*) Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке A. Прямая, проходящая через точку A, пересекает первую окружность в точке B, а вторую — в точке C. Касательная к первой окружности, проходящая через точку B, пересекает вторую окружность в точках D и E (D лежит между B и E). Известно, что $AB = 5$ и $AC = 4$. Найти длину отрезка CE и расстояние от точки A до центра окружности, касающейся отрезка AD и продолжений отрезков ED и EA за точки D и A соответственно.

$\boxed{6,\ 2}$

Задача 19. (*МГУ, мехмат, 2004-03.4*) В выпуклом четырехугольнике $KLMN$ диагонали KM и LN перпендикулярны соответственно сторонам MN и KL, а длина стороны KN равна $4\sqrt{3}$. На стороне KN расположена точка A так, что $\angle LAK = \angle MAN$. Известно, что $\angle MKN - \angle KNL = 15^\circ$. Найдите длину ломаной LAM и площадь четырехугольника $KLMN$, если $LA : AM = 1 : \sqrt{3}$.

$\boxed{\sqrt{6}\left(\sqrt{3}+1\right);\ 3\left(3+\sqrt{3}\right)}$

Задача 20. (*МГУ, мехмат, 2005.4*) На основании BC трапеции $ABCD$ взята точка E, лежащая на одной окружности с точками A, C и D. Другая окружность, проходящая через точки A, B и C, касается прямой CD. Найти BC, если $AB = 12$ и $BE : EC = 4 : 5$. Найти все возможные значения отношения радиуса первой окружности к радиусу второй при данных условиях.

$\boxed{18,\ \left(\tfrac{1}{3}; 1\right) \cup \left(1; \tfrac{5}{3}\right)}$

Задача 21. (*МГУ, мехмат, 2006.5*) Отрезок KB является биссектрисой треугольника KLM. Окружность радиусом 5 проходит через вершину K, касается стороны LM в точке B и пересекает сторону KL в точке A. Найти угол K и площадь треугольника KLM, если $ML = 9\sqrt{3}$, $KA : LB = 5 : 6$.

$\boxed{60^\circ,\ \frac{405\sqrt{3}}{16}}$

Задача 22. (*Всеросс., 2014, МЭ, 10*) Точка F — середина стороны BC квадрата $ABCD$. К отрезку DF проведён перпендикуляр AE. Найдите угол CEF.

Задача 23. (*Московская устная олимпиада по геометрии, 2012, 8–9*) В трапеции $ABCD$ стороны AD и BC параллельны, и $AB = BC = BD$. Высота BK пересекает диагональ AC в точке M. Найдите $\angle CDM$.

$\boxed{90^\circ}$

Задача 24. (*Олимпиада Эйлера и Всеросс., 2018, РЭ, 8.4, 9.3*) Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана точка E так, что $AE = DE$ и $\angle ABE = 90^\circ$. Точка M — середина отрезка BC. Найдите угол DME.

Задача 25. (*Первая лемма о воробьях*[1]) Точка W — середина дуги ACB описанной окружности треугольника ABC. Точки X и Y одновременно поехали из вершин A и B вдоль прямых AC и BC соответственно, и двигаются они *в одну сторону* (либо к точке C, либо от неё). Докажите, что точки W, C, X, Y лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда скорости поехавших точек равны.

Задача 26. (*Вторая лемма о воробьях*) Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон BC и AC в точках A_0 и B_0 соответственно. Точки X и Y одновременно поехали из точек A_0 и B_0 вдоль прямых BC и AC соответственно, и двигаются они *в разные стороны* (одна — к точке C, другая — от неё). Докажите, что точки C, X, Y, I (центр вписанной окружности) лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда скорости поехавших точек равны.

Задача 27. (*Московская устная олимпиада по геометрии, 2006, 8–9*) Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке K. Докажите, что касательная в точке K к окружности, описанной около треугольника ABK, параллельна CD.

Задача 28. (*Московская устная олимпиада по геометрии, 2012, 8–9*) В трапеции $ABCD$ стороны AD и BC параллельны, и $AB = BC = BD$. Высота BK пересекает диагональ AC в точке M. Найдите $\angle CDM$.

Задача 29. (*Московская устная олимпиада по геометрии, 2011, 8–9*) В трапеции $ABCD$ известно, что $AB = BC = CD$, CH — высота. Докажите, что перпендикуляр, опущенный из H на AC, проходит через середину BD.

Задача 30. (*ММО, 2012, 8.4, 9.3*) В параллелограмме $ABCD$ опустили перпендикуляр BH на сторону AD. На отрезке BH отметили точку M, равноудалённую от точек C и D. Пусть K — середина стороны AB. Докажите, что угол MKD прямой.

[1] Такое название прижилось после статьи А. Полянского «Воробьями по пушкам!» («Квант», 2012, №2).

Задача 31. (*ММО, 2016, 9.4*) Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Прямая, перпендикулярная стороне AC, пересекает сторону BC и прямую AB в точках Q и P соответственно. Докажите, что точки B, O и середины отрезков AP и CQ лежат на одной окружности.

Задача 32. (*Турнир городов, 2016, 8–9*) В треугольнике ABC медианы AA_0, BB_0, CC_0 пересекаются в точке M. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников MA_0B_0, MCB_0, MA_0C_0, MBC_0 и точка M лежат на одной окружности.

Задача 33. (*«Курчатов», 2018, 10.5*) Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB и AC в точках D и E соответственно. Точка I_A — центр вневписанной со стороны BC окружности треугольника ABC, а точки K и L — середины отрезков DI_A и EI_A соответственно. Прямые BK и CL пересекаются в точке F, лежащей внутри угла BAC. Найдите $\angle BFC$, если $\angle BAC = 50°$. (*Вневписанная окружность* касается стороны BC и продолжений сторон AB и AC за точки B и C соответственно.)

$\boxed{130^\circ}$

Задача 34. (*ММО, 2018, 10.3*) Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC, AH — его высота. Точка P — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую CO. Докажите, что прямая HP проходит через середину отрезка AB.

Задача 35. (*ММО, 2015, 11.3*) На основании AC равнобедренного треугольника ABC взяли произвольную точку X, а на боковых сторонах — точки P и Q так, что $XPBQ$ — параллелограмм. Докажите, что точка Y, симметричная точке X относительно PQ, лежит на описанной окружности треугольника ABC.

Задача 36. (*Всеросс., 2014, РЭ, 9.7*) Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке K. Оказалось, что точки B, D, а также середины отрезков AC и KC лежат на одной окружности. Какие значения может принимать угол ADC?

Задача 37. (*Всеросс., 2012, РЭ, 10.2*) Дан выпуклый шестиугольник $ABCDEF$. Известно, что $\angle FAE = \angle BDC$, а четырёхугольники $ABDF$ и $ACDE$ являются вписанными. Докажите, что прямые BF и CE параллельны.

Задача 38. (*Всеросс., 2011, финал, 9.2*) Дан остроугольный треугольник ABC. Окружность, проходящая через вершину B и центр O его описанной окружности, вторично пересекает стороны BC и BA в точках P и Q соответственно. Докажите, что точка пересечения высот треугольника POQ лежит на прямой AC.

Задача 39. (*Всеросс., 2014, финал, 9.2*) Трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD вписана в окружность Ω. Окружность ω проходит через точки C, D и пересекает отрезки CA, CB в точках A_1, B_1 соответственно. Точки A_2 и B_2 симметричны точкам A_1 и B_1 относительно середин отрезков CA и CB соответственно. Докажите, что точки A, B, A_2 и B_2 лежат на одной окружности.

Задача 40. (*Всеросс., 2016, финал, 9.2*) Окружность ω касается сторон угла BAC в точках B и C. Прямая ℓ пересекает отрезки AB и AC в точках K и L соответственно. Окружность ω пересекает ℓ в точках P и Q. Точки S и T выбраны на отрезке BC так, что $KS \parallel AC$ и $LT \parallel AB$. Докажите, что точки P, Q, S и T лежат на одной окружности.

Задача 41. (*Всеросс., 2012, финал, 9.3*) Дан параллелограмм $ABCD$ с тупым углом A. Точка H — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на BC. Продолжение медианы треугольника ABC, проведённой из вершины C, пересекает описанную около него окружность в точке K. Докажите, что точки K, H, C и D лежат на одной окружности.

Задача 42. (*Всеросс., 2018, финал, 10.2*) Дан остроугольный треугольник ABC, в котором $AB < AC$. Пусть M и N — середины сторон AB и AC соответственно, а D — основание высоты, проведённой из A. На отрезке MN нашлась точка K такая, что $BK = CK$. Луч KD пересекает окружность Ω, описанную около треугольника ABC, в точке Q. Докажите, что точки C, N, K и Q лежат на одной окружности.

Задача 43. (*Всеросс., 2014, финал, 9.4*) Точка M — середина стороны AC остроугольного треугольника ABC, в котором $AB > BC$. Окружность Ω описана около треугольника ABC. Касательные к Ω, проведённые в точках A и C, пересекаются в точке P. Отрезки BP и AC пересекаются в точке S. Пусть AD — высота треугольника ABP. Окружность ω, описанная около треугольника CSD, пересекает окружность Ω в точке $K \neq C$. Докажите, что $\angle CKM = 90°$.

Задача 44. (*Турнир городов, 2015, 8–11*) Внутри окружности расположен равносторонний N-угольник. Каждую его сторону продлевают в обе стороны до пересечения с окружностью, получая по два новых отрезка, расположенных вне многоугольника. Затем некоторые из $2N$ полученных отрезков красятся в красный цвет, а остальные — в синий цвет. Докажите, что можно раскрасить эти отрезки так, чтобы сумма длин красных отрезков равнялась сумме длин синих.