Оригинал — Matematiikka, pitkä oppimäärä, kevät 2020.

Авторский перевод и публикация — с разрешения Ylioppilastutkintolautakunta.

Национальный экзамен по математике в Финляндии для выпускников гимназий

Профильный уровень, весна 2020

Экзамен состоит из 13 заданий, из которых выполняются десять. Задания разделены на три части. Часть A содержит четыре обязательных для всех задания. Часть B1 содержит пять заданий, из которых выполняются три. Часть B2 содержит четыре задания, из которых выполняются три. Все задания оцениваются числом очков от 0 до 12, поэтому максимальная сумма очков за экзамен равна 120.

В части A вы можете пользоваться таблицами и основными программами, предоставляемыми системой проведения экзамена. Часть A завершается нажатием кнопки, расположенной после задачи 4. После этого ответы части A редактировать больше нельзя. После завершения части A вы можете продолжать пользоваться программами системы проведения экзамена. Вдобавок вам разрешается использовать свой калькулятор. Также вы можете выполнять задания частей B до завершения части A.

В большинстве заданий ответы на все пункты записываются в одно и то же поле ответа. Разделяйте свой ответ в соответствии с пунктами задания. При желании вы можете снабжать ответы рисунками, диаграммами и таблицами и прикреплять соответствующие скриншоты к тексту ответа в любом месте.

Не пишите ничего в месте, отведённом для ответа на то задание, которое не хотите оставлять для оценивания.

Часть A

Выполните четыре задания.

1. Уравнения и неравенства [*12 очков*]

В этом задании достаточно привести лишь ответ. Не обосновывайте ответы этого задания. В этом задании нельзя использовать скриншоты и редакторы формул. Максимальная длина каждого ответа составляет 30 знаков.

1. (*2 очка*) Решите уравнение $-4x + 2 = 0$.
2. (*3 очка*) Решите неравенство $2x + 4 < -6$.
3. (*3 очка*) Решите уравнение $x^6 + x^3 = 0$.
4. (*4 очка*) Какие числа $x \in \mathbb{R}$ удовлетворяют обоим неравенствам $-3x + 6 < 0$ и $x^2 - 9 < 0$?

2. Операции над векторами [*12 очков*]

Рассмотрим векторы $\vec{a} = 7\vec{i} + 2\vec{j}$ и $\vec{b} = -3\vec{i} + 5\vec{j}$.

Не обосновывайте ответы этого задания. В этом задании нельзя использовать скриншоты и редакторы формул, поэтому пишите $\vec{i}$ и $\vec{j}$ в виде i и j. Максимальная длина каждого ответа составляет 30 знаков.

1. (*2 очка*) Вычислите $\vec{a} + \vec{b}$.
2. (*2 очка*) Вычислите $\vec{b} - 2\vec{a}$.
3. (*2 очка*) Вычислите $|\vec{b}|^2$.
4. (*2 очка*) Вычислите длину вектора $\vec{a} + \vec{b}$ с точностью до двух десятичных знаков.
5. (*2 очка*) Вычислите $\vec{a} \cdot \vec{b}$.
6. (*2 очка*) Вычислите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с точностью до градуса.

3. Экстремум площади [*12 очков*]

1. (*3 очка*) Вычислите интеграл
$$\int_0^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx.$$
2. (*9 очков*) Из области, ограниченной графиком функции $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ и осью x, вырезается вертикальная полоса прямыми $x = t$ и $x = t + \frac{1}{2}$. При каком значении параметра $0 \leqslant t \leqslant \frac{3}{2}$ площадь полосы максимальна?

4. Наибольшее расстояние [*12 очков*]

Точка (x, y) удовлетворяет неравенству $x^4 + y^2 \leqslant 1$. Найдите наибольшее расстояние от точки (x, y) до начала координат.

Часть B1

Выполните три задания.

5. Фигуры в круге [*12 очков*]

Радиус круга равен 4. Внутри круга нарисованы три кривых, которые соединяют концы горизонтального диаметра так, как показано на рисунке 5A. Каждая кривая состоит из двух полуокружностей, и они делят горизонтальный диаметр на четыре равные части. Кривые делят круг на четыре разноцветные области. Покажите, что все они имеют одинаковую площадь.

6. Парабола и точка [*12 очков*]

В этом задании можно дать как точные ответы, так и приближённые с точностью до двух десятичных знаков.

Рассмотрим параболу $y = x^2$ и точку $A = (1, -1)$.

1. (*4 очка*) Через какие точки параболы проходят касательные, проведённые через точку A?
2. (*8 очков*) Найдите точку параболы, ближе всего расположенную к точке A, и расстояние от неё до точки A.

7. Яцзы [*12 очков*]

В игре яцзы игрок бросает пять игральных кубиков. Рассмотрим броски, в которых появляются *фулл хаус* или *каре*. Фулл хаус — комбинация, в которой одно количество очков выпадает три раза, а некоторое другое количество очков — два раза. В каре выпадает четыре раза одно количество очков и один раз — другое.

1. (*3 очка*) Найдите вероятность того, что выпадет фулл хаус с тремя шестёрками и двумя пятёрками.
2. (*6 очков*) Найдите вероятность того, что выпадет фулл хаус.
3. (*3 очка*) Найдите вероятность того, что выпадет каре.

8. Алгоритм деления полиномов [*12 очков*]

С помощью алгоритма деления полиномов можно разделить, например, полином

$$p(x) = x^6 - 4x^4 + 2x^3 + 7x^2 - 3x + 4$$

на полином $q(x) = x^2 - 3x + 1$. Вот первые шаги алгоритма:

$$p(x) = x^4q(x) + 3x^5 - 5x^4 + 2x^3 + 7x^2 - 3x + 4 = (x^4 + 3x^2)q(x) + 4x^4 - x^3 + 7x^2 - 3x + 4.$$

Объясните, что тут сделано, и выполните до конца остальные шаги алгоритма деления.

9. Производная обратной функции [*12 очков*]

Приведите пример такой функции f, что для производной обратной к ней функции выполнено равенство $(f^{-1})'(2) = \frac{1}{2}$. Не забудьте обосновать, почему ваш пример обладает требуемым свойством.

Часть B2

Выполните три задания.

10. Логарифм большого числа [*12 очков*]

Десятичная запись числа $a = 1234\ldots9101112\ldots99100101\ldots998999$ получается последовательным записыванием чисел 1, 2, 3, ..., 998 и 999.

1. (*3 очка*) Для какого целого числа k выполнено $a \approx 1{,}23 \cdot 10^k$?
2. (*9 очков*) Найдите целую часть числа $\ln a$.

11. Числовая последовательность [*12 очков*]

Пусть $a_1 = \sqrt{2}$ и $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ при $n \geqslant 1$.

1. (*4 очка*) Покажите по индукции, что последовательность (a_n) является возрастающей.
2. (*4 очка*) Покажите по индукции, что $a_n < 2$ для всех $n \geqslant 1$.
3. (*4 очка*) Найдите значение выражения

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}},$$

понимая его как предел последовательности (a_n).

12. Вероятность среднего геометрического [*12 очков*]

Среднее геометрическое двух положительных чисел a и b есть $\sqrt{ab}$.

1. (*3 очка*) Приведите пример двух различных чисел a и b из промежутка $[2, 100]$, для которых $\sqrt{ab}$ является целым числом.
2. (*9 очков*) Генератор случайных чисел выдаёт независимо друг от друга два целых числа в диапазоне $[1, 100]$ так, что вероятность появления каждого числа равна $\frac{1}{100}$. Какова вероятность того, что среднее геометрическое сгенерированных чисел является целым числом? Вы можете вычислить классическую вероятность этого события точно или дать оценку, основанную на модельных соображениях.

13. Тригонометрическое неравенство [*12 очков*]

Пусть n — положительное целое число. Рассмотрим функции

$$f(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right) \quad \text{и} \quad g(x) = n \cos x.$$

Покажите, что для корня $x_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ уравнения $f(x) = g(x)$ верно $g'(x_0) < -n + 1$.

Ответы

Оригинал — Hyvän vastauksen piirteitä.

1.1. $x = \frac{1}{2}$

1.2. $x < -5$

1.3. $x = 0$ или $x = -1$

1.4. $2 < x < 3$

2.1. $4\vec{i} + 7\vec{j}$

2.2. $-17\vec{i} + \vec{j}$

2.3. 34

2.4. $\approx 8{,}06$

2.5. -11

2.6. $\approx 105°$

3.1. $\frac{4}{\pi}$

3.2. $\frac{3}{4}$

4. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

6.1. $\left(1 - \sqrt{2}, 3 - 2\sqrt{2}\right) \approx (-0{,}41; 0{,}17)$ и $\left(1 + \sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}\right) \approx (2{,}41; 5{,}83)$

6.2. $\approx (0{,}31; 0{,}10)$

7.1. $\frac{10}{6^5}$

7.2. $\frac{50}{6^4}$

7.3. $\frac{25}{6^4}$

8. $p(x) = (x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 11x + 36)q(x) + 94x - 32$

10.1. 2888

10.2. 6650

11.3. 2

12.2. 0,031