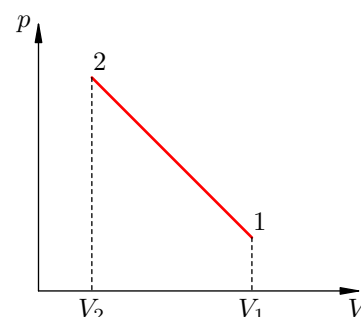


## Два способа вычисления теплоемкости газа

На первом туре отборочного этапа олимпиады «Физтех» по физике 2023/24 года у многих 11-классников вызвала трудности задача на вычисление теплоемкости идеального газа.

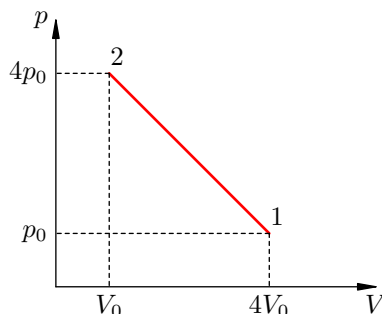
**Задача.** Гелий сжимают от объема  $V_1$  до объема  $V_2$  в квазистатическом процессе, график зависимости давления от объема представлен на рисунке. Температура газа в состояниях 1 и 2 одинакова. Отношение объема  $V_1$  к объему  $V_2$  равно 4. Найдите молярную теплоемкость гелия в этом процессе вблизи состояния 1.



Не все знают, что такие задачи можно решать двумя способами:

1. непосредственно с помощью первого закона термодинамики;
2. короче и изящнее — через касательную к политропе.

В любом случае нам понадобится уравнение красной прямой, поэтому давайте сразу его получим. Из совпадения температур в состояниях 1 и 2 имеем  $p_1 V_1 = p_2 V_2$ . Обозначим  $V_1 = 4V_0$  и  $V_2 = V_0$ ; тогда  $p_1 = p_0$  и  $p_2 = 4p_0$ .



Ну и теперь не составляет труда написать уравнение нашей прямой:

$$p = p_0 \left( 5 - \frac{V}{V_0} \right). \quad (1)$$

Заодно возьмем дифференциалы от обеих частей равенства (1):

$$dp = -\frac{p_0}{V_0} dV. \quad (2)$$

Такова связь изменений давления и объема в нашем процессе.

Переходим к рассмотрению двух обещанных способов решения задачи. Начинаем с «наивного» способа — через первый закон термодинамики.

## 1 Первый закон термодинамики

Имеем  $\delta Q = \delta A + dU$ , где, как обычно,  $\delta A = pdV$  и  $dU = \frac{3}{2}\nu R dT$  (гелий — одноатомный газ!). Кроме того, по определению молярной теплоемкости,  $\delta Q = \nu C dT$ . Итак, для начала

$$\nu C dT = pdV + \frac{3}{2}\nu R dT. \quad (3)$$

Хорошо бы теперь вместо дифференциала  $dV$  организовать тут  $dT$ : тогда  $dT$  сократится и мы найдем теплоемкость! Чтобы этого добиться, подключим к делу уравнение состояния:  $pV = \nu RT$ . Возьмем дифференциалы от обеих его частей:

$$pdV + V dp = \nu R dT.$$

Подставим сюда  $dp$  из (2):

$$pdV - V \frac{p_0}{V_0} dV = \nu R dT.$$

Отсюда получаем желаемое:

$$dV = \frac{\nu R dT}{p - \frac{p_0}{V_0} V}.$$

Подставляем это в (3):

$$\nu C dT = p \frac{\nu R dT}{p - \frac{p_0}{V_0} V} + \frac{3}{2}\nu R dT,$$

откуда после сокращения на  $\nu dT$  получим

$$C = R \left( \frac{3}{2} + \frac{p}{p - \frac{p_0}{V_0} V} \right). \quad (4)$$

Таким образом, мы нашли теплоемкость в произвольной точке нашей красной прямой. Нас спрашивали про точку 1, а в ней  $p = p_0$  и  $V = 4V_0$ . Ок, подставляем это в (4):

$$C = R \left( \frac{3}{2} + \frac{p_0}{p_0 - \frac{p_0}{V_0} \cdot 4V_0} \right) = R \left( \frac{3}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{7}{6}R.$$

Задача решена.

## 2 Касание политропы

Напомним, что политропическим процессом называется процесс с постоянной теплоемкостью. Уравнение политропы имеет вид

$$pV^n = \text{const},$$

где показатель политропы

$$n = \frac{C - C_p}{C - C_V}.$$

Чтобы решить задачу, нам нужно найти такую политропу, которая касается в точке 1 нашей красной прямой. В самом деле, представим себе политропу как синюю кривую: если синяя кривая касается красной прямой в точке 1, то вблизи точки 1 маленький красный отрезок почти совпадает с маленькой синей дугой; иными словами, наш красный процесс локально неотличим от политропического. И если мы вычислим показатель  $n$  нужной политропы, то тем самым мы и найдем локальную теплоемкость красного процесса в окрестности точки 1.

Ну что ж, приступаем. Политропа проходит через точку 1 с координатами  $(4V_0, p_0)$ , поэтому уравнение политропы имеет вид

$$pV^n = p_0(4V_0)^n = k,$$

где через  $k$  мы для краткости обозначили константу  $p_0(4V_0)^n$ . Отсюда

$$p = kV^{-n}.$$

Берем производную:

$$\frac{dp}{dV} = -knV^{-n-1}. \quad (5)$$

Поскольку политропа касается красной прямой в точке 1, значение производной (5) в точке  $V = 4V_0$  равно угловому коэффициенту  $-\frac{p_0}{V_0}$  красной прямой:

$$-kn(4V_0)^{-n-1} = -\frac{p_0}{V_0}.$$

Убираем минусы и подставляем сюда значение  $k$ :

$$p_0(4V_0)^n n(4V_0)^{-n-1} = \frac{p_0}{V_0},$$

откуда легко находим  $n = 4$ .

Ну вот и все. Дальше элементарно:

$$4 = n = \frac{C - C_p}{C - C_V} = \frac{C - \frac{5}{2}R}{C - \frac{3}{2}R},$$

и отсюда после простых вычислений получаем

$$C = \frac{7}{6}R.$$