Тригонометрия и векторы

Дадим альтернативное решение задачи, которая предлагалась 11-классникам в 2023 году на Всесибирской олимпиаде по математике.

Задача. (*Всесиб., 2023, 11.2*) Тройка действительных чисел A, B, C такова, что

$$\sin A + \sin B + \sin C = 0 \quad \text{и} \quad \cos A + \cos B + \cos C = 0.$$

Найти значение выражения $\cos(A - B) + \cos(B - C) + \cos(C - A)$.

Авторское решение опирается на рутинные тригонометрические преобразования, ну а мы пойдем другим путем: используем векторы! С их помощью мы проясним геометрическую суть задачи и получим ответ почти без вычислений.

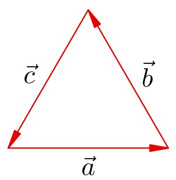
Решение. Рассмотрим прямоугольную декартову систему координат Oxy и единичную тригонометрическую окружность $x^2 + y^2 = 1$. Теми же буквами A, B, C обозначим точки тригонометрической окружности, отвечающие углам A, B, C. Рассмотрим единичные векторы

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = (\cos A, \sin A),$$
$$\vec{b} = \overrightarrow{OB} = (\cos B, \sin B),$$
$$\vec{c} = \overrightarrow{OC} = (\cos C, \sin C).$$

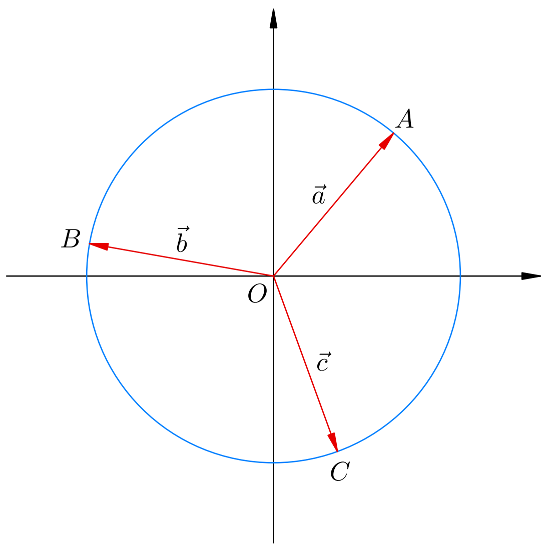
Имеем:

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\cos A + \cos B + \cos C, \sin A + \sin B + \sin C) = \vec{0},$$

то есть векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют треугольник. Ну а поскольку длины всех векторов одинаковы (равны единице), то этот треугольник — равносторонний:



Следовательно, на тригонометрической окружности точки A, B, C располагаются в вершинах равностороннего треугольника (по часовой стрелке или против часовой — не важно):



Каждая из дуг AB, BC, CA равна $\frac{2\pi}{3}$, и решение задачи легко заканчивается:

$$\cos(A-B)+\cos(B-C)+\cos(C-A)=\cos\frac{2\pi}{3}+\cos\frac{2\pi}{3}+\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}.$$

Авторское решение

(Ссылка на оригинальный файл Всесиба)

11.2. Тройка действительных чисел A,B,C такова, что $SinA+SinB+SinC=0$ и $CosA+CosB+CosC=0$. Найти значение выражения $Cos(A-B)+Cos(B-C)+Cos(C-A)$.

Ответ. $-\frac{3}{2}$.

Решение. Возведём два первых выражения в квадрат, получим $(SinA+SinB+SinC)^2=Sin^2A+Sin^2B+Sin^2C+2(SinA\cdot SinB+SinB\cdot SinC+SinA\cdot SinC)=0$

и $(CosA+CosB+CosC)^2=Cos^2A+Cos^2B+Cos^2C+$
$+2(CosA\cdot CosB+CosB\cdot CosC+CosA\cdot CosC)=0$. Складывая полученные выражения, имеем
$3+2(SinA\cdot SinB+SinB\cdot SinC+SinA\cdot SinC+CosA\cdot CosB+CosB\cdot CosC+CosA\cdot CosC)=0$.
Учитывая равенства
$SinA\cdot SinB+CosA\cdot CosB=Cos(A-B), SinA\cdot SinC+CosA\cdot CosC=Cos(C-A)$, и
$SinB\cdot SinC+CosB\cdot CosC=Cos(B-C)$, получим
$3+2(Cos(A-B)+Cos(B-C)+Cos(C-A))=0$, откуда
$Coc(A-B)+Cos(B-C)+Cos(C-A)=-\frac{3}{2}$.