Тригонометрия в помощь!

На Всесибирской олимпиаде по математике в 2018 году 11-классникам была предложена следующая задача.

Задача. (*Всесиб., 2018, 11.1*) Пусть $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$ и $ac + bd = 0$ для некоторых действительных чисел a, b, c, d. Найти все возможные значения выражения $ab + cd$.

Авторское решение идет чисто алгебраическим путем. Ну а мы взглянем на задачу со стороны тригонометрии!

Решение. Поскольку $a^2+b^2 = 1$, точка с координатами (a, b) лежит на единичной окружности; следовательно, найдется угол α такой, что $a = \cos\alpha$, $b = \sin\alpha$. Аналогично $c = \cos\beta$ и $d = \sin\beta$ для некоторого β. По условию имеем:

$$0 = ac + bd = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha - \beta).$$

Тогда искомая величина

$$ab + cd = \cos\alpha\sin\alpha + \cos\beta\sin\beta = \frac{1}{2}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta) = \sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) = 0.$$

Всё :-)

Авторское решение

11.1. Пусть $a^2+b^2=c^2+d^2=1$ и $ac+bd=0$ для некоторых действительных чисел a, b, c, d. Найти все возможные значения выражения $ab+cd$.

Ответ. 0.

Решение. Пусть сначала $b\neq 0$. Выразим из второго равенства $d=\frac{-ac}{b}$ и подставим в равенство $c^2+d^2=1$. Избавившись от знаменателя, получим $c^2(a^2+b^2)=b^2$, откуда ввиду $a^2+b^2=1$ получим $b=\pm c$. Подставив это в равенство $a^2+b^2=c^2+d^2$, получим $a=\pm d$. Ввиду равенства $ac+bd=0$ имеем либо $b=c, a=-d$, либо $b=-c, a=d$. В обоих случаях $ab+cd=0$.

Если $b=0$, то из $ac+bd=0$ следует $a=0$ или $c=0$. Первое невозможно в силу $a^2+b^2=1$, значит $c=0$, откуда снова $ab+cd=0$.