Петя, Маша и рубли, или Билинейные уравнения в целых числах

Желание написать данную статью возникло под влиянием задачи, которая предлагалась восьмиклассникам на олимпиаде «Шаг в будущее» по математике в 2019 году. Эта задача была пятой в варианте, и за нее (как и за последнюю шестую задачу) давалось максимальное количество баллов (а именно, 20).

Задача. (*«Шаг в будущее», 2019, 8.5*) У Пети и Маши целое число рублей у каждого. Петя говорит Маше: «Если ты дашь мне 3 рубля, у меня будет в n раз больше рублей, чем у тебя». Маша отвечает: «Если ты дашь мне n рублей, у меня будет в 3 раза больше рублей, чем у тебя».

Какие натуральные значения может принимать n, если ребята говорят правду?

Авторское решение содержит полезный трюк, который стоит осознать и принять на вооружение. Ну а мы зайдем с другой стороны и сведем дело к уравнению в целых числах определенного типа. Данный тип уравнений (так называемые *билинейные уравнения*) нередко встречается, и знание правильных действий может помочь вам в целом ряде других ситуаций. Поэтому давайте сначала посмотрим, о каких уравнениях идет речь, и освоим технику их решения.

Задача. (*«Физтех», 2011, 9, 11*) Целые числа m и n таковы, что

$$4m + 5n = mn - 9.$$

Найдите, какое наибольшее значение может принимать m.

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$mn - 4m - 5n = 9.$$

Далее мы хотим прибавить к обеим частям некоторое число так, чтобы левая часть разложилась на множители. Начнем группировать:

$$m(n-4) - 5n = 9.$$

Теперь видим: чтобы разложить левую часть на множители, нам нужно после пятерки иметь множитель $(n-4)$. Для этого прибавляем к обеим частям 20:

$$m(n-4) - 5n + 20 = 9 + 20,$$
$$m(n-4) - 5(n-4) = 29,$$
$$(m-5)(n-4) = 29.$$

Дальнейшее ясно: число $m-5$ является делителем числа 29, наибольший такой делитель равен 29, поэтому максимальное значение m равно 34.

Ответ. 34.

Отлично, двигаемся дальше. Сейчас ситуация немного усложнится.

Задача. (*МФТИ, 2004*) Найти все пары целых чисел, при которых является верным равенство

$$-3xy - 10x + 13y + 35 = 0.$$

Решение. Сначала умножим уравнение на -1, чтобы перед слагаемым $3xy$ оказался знак плюс (так будет удобнее):

$$3xy + 10x - 13y - 35 = 0.$$

Попытка действовать аналогично предыдущей задаче приведет к некоторым техническим затруднениям, поскольку 13 не делится на 3. Эти затруднения, конечно, легко преодолеваются с помощью дробей, но еще лучше умножить уравнение на 3 и ввести временную двойную замену $a = 3x$, $b = 3y$:

$$3x \cdot 3y + 10 \cdot 3x - 13 \cdot 3y - 105 = 0,$$
$$ab + 10a - 13b - 105 = 0.$$

А вот теперь работаем как в предыдущей задаче:

$$a(b + 10) - 13(b + 10) + 25 = 0,$$
$$(a - 13)(b + 10) = -25.$$

Двойная замена свое дело сделала и может уходить. Обратная замена:

$$(3x - 13)(3y + 10) = -25.$$

Остается разобрать случаи, перебрав все делители числа 25.

- $3x - 13 = 25$. Решений нет.
- $3x - 13 = 5$, $3y + 10 = -5$. Это дает решение $x = 6$, $y = -5$.
- $3x - 13 = 1$. Решений нет.
- $3x - 13 = -1$, $3y + 10 = 25$. Это дает решение $x = 4$, $y = 5$.
- $3x - 13 = -5$. Решений нет.
- $3x - 13 = -25$, $3y + 10 = 1$. Здесь имеем решение $x = -4$, $y = -3$.

Ответ. $(6, -5)$, $(4, 5)$, $(-4, -3)$.

Давайте разберем еще одну задачу, чтобы закрепить рассмотренную выше технику *«доможь и введи двойную замену»*.

Задача. (*ММО, 1994, 8.2*) Ученик не заметил знак умножения между двумя трёхзначными числами и написал одно шестизначное число, которое оказалось в семь раз больше их произведения. Найдите эти числа.

Решение. Пусть x и y — искомые числа. Шестизначное число $\overline{xy}$ равно $1000x + y$, так что имеем уравнение

$$1000x + y = 7xy,$$

или

$$7xy - 1000x - y = 0.$$

Ситуация похожа на предыдущую задачу, не правда ли? Умножаем уравнение на 7 и обозначаем $a = 7x$, $b = 7y$:

$$\begin{gathered}7x \cdot 7y - 1000 \cdot 7x - 7y = 0,\\ ab - 1000a - b = 0,\\ a(b - 1000) - (b - 1000) = 1000,\\ (a - 1)(b - 1000) = 1000,\\ (7x - 1)(7y - 1000) = 1000.\end{gathered}$$

Видим, что число $7x - 1$ есть делитель 1000, то есть $7x$ является делителем числа 1001, и это при том, что натуральное число x трехзначное. Очевидно, что такое возможно в единственном случае $7x = 1001$, то есть $x = 143$. Отсюда $7y - 1000 = 1$ и $y = 143$.

Ответ. 143 и 143.

Итак, мы научились решать *билинейные* уравнения в целых числах, то есть уравнения вида

$$axy + bx + cy = d$$

(левая часть такого уравнения линейна по обоим переменным x и y, поэтому уравнение и называется билинейным). И теперь можно переходить к исходной задаче с «Шага в будущее». Дублируем для удобства ее условие.

Задача. (*«Шаг в будущее», 2019, 8.5*) У Пети и Маши целое число рублей у каждого. Петя говорит Маше: «Если ты дашь мне 3 рубля, у меня будет в n раз больше рублей, чем у тебя». Маша отвечает: «Если ты дашь мне n рублей, у меня будет в 3 раза больше рублей, чем у тебя».

Какие натуральные значения может принимать n, если ребята говорят правду?

Решение. Пусть у Пети имеется p рублей, а у Маши — m рублей. Получаем систему:

$$\begin{cases}p + 3 = n(m - 3),\\ m + n = 3(p - n).\end{cases}$$

Мы хотим прийти к билинейному уравнению и для этого исключаем из системы Петю. Выражаем p из первого уравнения:

$$p = mn - 3n - 3 \tag{1}$$

и подставляем во второе:

$$\begin{gathered}m + n = 3(mn - 3n - 3) - 3n,\\ 3mn - m - 13n = 9.\end{gathered}$$

Вот оно, билинейное уравнение! Умножаем его на 3 и делаем двойную замену $a = 3m$, $b = 3n$:

$$\begin{gathered}3m \cdot 3n - 3m - 13 \cdot 3n = 27,\\ ab - a - 13b = 27,\\ a(b - 1) - 13(b - 1) = 40,\\ (a - 13)(b - 1) = 40,\end{gathered}$$

и после обратной замены

$$(3m - 13)(3n - 1) = 40. \tag{2}$$

Число $3n - 1$ является делителем 40 и имеет остаток 2 при делении на 3. Выпишем все делители числа 40: это 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40. Из них остаток 2 при делении на 3 имеют лишь 2, 5, 8 и 20. Рассмотрим все эти случаи и выясним, получаются ли там натуральные значения m и p.

- $3n - 1 = 2$. Отсюда $n = 1$, и тогда из уравнения (2) имеем $3m - 13 = 20$, $m = 11$. Из (1) находим $p = 5$. Таким образом, этот случай возможен.
- $3n - 1 = 5 \to n = 2$, $m = 7$, $p = 5$ — ок, данный случай возможен.
- $3n - 1 = 8 \to n = 3$, $m = 6$, $p = 6$ — ок, данный случай возможен.
- $3n - 1 = 20 \to n = 7$, $m = 5$, $p = 11$ — ок, данный случай возможен.

Итак, все значения $n = 1, 2, 3, 7$ годятся.

Ответ. 1, 2, 3, 7.

Авторское решение

5. Решение: Пусть у Маши x рублей, у Пети y рублей , тогда

$n(x-3)=y+3$

$x+n=3(y-n)$

Выразим x из второго уравнения и подставим в первое:

$n(3y-4n-3)=y+3$,

$3ny-y=4n^2+3n+3$,

$y=(4n^2+3n+3):(3n-1)$

чтобы y было целым, $(4n^2+3n+3)$ должно делиться нацело на $(3n-1)$

$(4n^2+3n+3) \vdots (3n-1)$

$3(4n^2+3n+3)-4n(3n-1) \vdots (3n-1)$

$13n+9 \vdots (3n-1)$

$3(13n+9)-13(3n-1) \vdots (3n-1)$

$40 \vdots (3n-1)$

$(3n-1)$ является делителем 40 только при $n=1;2;3;7$

Проверим, являются ли x и y натуральными.

$n=1$, $y=5$, $x=11$

$n=2$, $y=5$, $x=7$

$n=3$, $y=6$, $x=6$

$n=7$, $y=11$, $x=5$

Ответ: 1;2;3;7.