Петя и кубик

Данная статья является попыткой осмыслить одну задачу по теории вероятности, которая предлагалась 11-классникам на олимпиаде «Росатом» по математике в 2022 году. Приведенное решение — более длинное и «лобовое», чем авторское, но, возможно, более прозрачное. Однако полученный ответ отличается от авторского, и причина этого пока не ясна.

Задача. (*«Росатом», 2022, 11.4*) Петя бросает несколько раз на стол игральный кубик и считает сумму очков, выпавших на его верхней грани. Для любого натурального числа n событие A_n наступает, если эта сумма равна n. Найти вероятность события A_{11}.

Решение. Очевидно, что Петя бросает кубик не более 11 раз. *Мы будем считать, что Петя бросает кубик ровно 11 раз.* Интересующее нас событие A_{11} наступает, если сумма первых нескольких бросков равна 11. В таком случае Петя продолжает свои броски, доводя их число до 11; какие числа выпадают при оставшихся бросках, уже роли не играет.

Результат серии из 11 бросков можно записать в виде 11-значного числа, составленного из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6. Например, число 25431165263 означает, что при первом броске выпало 2 очка, при втором — 5 очков и так далее. Событие A_{11} в данной серии наступает: сумма первых трех бросков равна 11. А вот в серии 31635541262 событие A_{11} не наступает: сумма любого начального отрезка цифр не равна 11.

Задачу решаем в рамках классической вероятностной модели. Прежде всего опишем множество элементарных событий и его подмножество — событие A_{11}, вероятность которого нас просят найти.

- *Множество элементарных событий* Ω — это множество всех 11-значных чисел, составленных из цифр от 1 до 6. Ясно, что все элементарные события равновозможны и что $|\Omega| = 6^{11}$.
- Элементарное событие будем называть *благоприятным*, если сумма первых нескольких его цифр равна 11.
- Событие A_{11} — это множество всех благоприятных элементарных событий.

Тогда искомая вероятность

$$p = \frac{|A_{11}|}{|\Omega|} = \frac{|A_{11}|}{6^{11}},$$

и нам нужно найти мощность множества A_{11}, то есть количество благоприятных элементарных событий. Мы найдем его перебором по длине начального отрезка, сумма цифр которого равна 11.

Именно, *начальным отрезком* благоприятного элементарного события назовем те первые несколько его цифр, сумма которых равна 11. Например, благоприятное элементарное событие 25431165263 имеет начальный отрезок 254 длиной 3.

Начальный отрезок называем *упорядоченным*, если цифры в нем идут в порядке неубывания. Мы будем перебирать упорядоченные начальные отрезки заданной длины и смотреть, сколько благоприятных элементарных событий порождает каждый такой отрезок. Например, упорядоченный начальный отрезок 1111223 длины 7 порождает

$$\frac{7!}{4!2!} \cdot 6^4$$

благоприятных элементарных событий (ведь перестановкой цифр данного упорядоченного отрезка мы можем получить $\frac{7!}{4!2!}$ различных начальных отрезков, а потом дописать любые четыре цифры до 11-значного числа).

Итак, начинаем перебор по длине k начального отрезка. В каждом случае ищем количество n_k благоприятных элементарных событий, сумма первых k цифр которых равна 11.

1. $k = 1$. Очевидно, что таких чисел нет; $n_1 = 0$.

2. $k = 2$. Очевидно, что благоприятные элементарные события имеют вид $\overline{56a}$ или $\overline{65a}$, где a — любое 9-значное число (напомним, составленное из цифр от 1 до 6). Тогда

$$n_2 = 2 \cdot 6^9.$$

3. $k = 3$. Упорядоченные начальные отрезки (ранжированные по возрастанию соответствующих трехзначных чисел):

$$\begin{gathered}146\\155\\236\\245\\335\\344\end{gathered}$$

Количество соответствующих благоприятных событий:

$$n_3 = \left(3 \cdot 3! + 3 \cdot \frac{3!}{2!}\right) \cdot 6^8 = 27 \cdot 6^8.$$

4. $k = 4$. Упорядоченные начальные отрезки:

$$\begin{gathered}1136\\1145\\1226\\1235\\1244\\1334\\2225\\2234\\2333\end{gathered}$$

Имеем:

$$n_4 = \left(1 \cdot 4! + 6 \cdot \frac{4!}{2!} + 2 \cdot \frac{4!}{3!}\right) \cdot 6^7 = 104 \cdot 6^7.$$

5. $k=5$. Упорядоченные начальные отрезки:

$$
\begin{gathered}
11126\\
11135\\
11144\\
11225\\
11234\\
11333\\
12224\\
12233\\
22223
\end{gathered}
$$

Имеем:

$$n_5=\left(1\cdot\frac{5!}{4!}+3\cdot\frac{5!}{3!}+1\cdot\frac{5!}{2!}+2\cdot\frac{5!}{2!2!}+2\cdot\frac{5!}{2!3!}\right)\cdot 6^6=205\cdot 6^6.$$

6. $k=6$. Упорядоченные начальные отрезки:

$$
\begin{gathered}
111116\\
111125\\
111134\\
111224\\
111233\\
112223\\
122222
\end{gathered}
$$

Имеем:

$$n_6=\left(2\cdot\frac{6!}{5!}+2\cdot\frac{6!}{4!}+3\cdot\frac{6!}{2!3!}\right)\cdot 6^5=252\cdot 6^5.$$

7. $k=7$. Упорядоченные начальные отрезки:

$$
\begin{gathered}
1111115\\
1111124\\
1111133\\
1111223\\
1112222
\end{gathered}
$$

Имеем:

$$n_7=\left(1\cdot\frac{7!}{6!}+1\cdot\frac{7!}{5!}+1\cdot\frac{7!}{5!2!}+1\cdot\frac{7!}{4!2!}+1\cdot\frac{7!}{3!4!}\right)\cdot 6^4=210\cdot 6^4.$$

8. $k=8$. Упорядоченные начальные отрезки:

$$
\begin{gathered}
11111114\\
11111123\\
11111222
\end{gathered}
$$

Имеем:

$$n_8=\left(1\cdot\frac{8!}{7!}+1\cdot\frac{8!}{6!}+1\cdot\frac{8!}{5!3!}\right)\cdot 6^3=120\cdot 6^3.$$

9. $k = 9$. Упорядоченные начальные отрезки:

$$111111113$$
$$111111122$$

Имеем:

$$n_9 = \left(\frac{9!}{8!} + \frac{9!}{7!2!}\right) \cdot 6^2 = 45 \cdot 6^2.$$

10. $k = 10$. Упорядоченный начальный отрезок один: 1111111112. Тогда

$$n_{10} = \frac{10!}{9!} \cdot 6 = 10 \cdot 6.$$

11. $k = 11$. Такое число всего одно: 11111111111, так что $n_{11} = 1$.

Итак, число благоприятных элементарных событий

$$|A_{11}| = n_1 + n_2 + \ldots + n_{11},$$

а искомая вероятность

$$p = \frac{n_1 + n_2 + \ldots + n_{11}}{6^{11}} = \frac{2}{6^2} + \frac{27}{6^3} + \frac{104}{6^4} + \frac{205}{6^5} + \frac{252}{6^6} + \frac{210}{6^7} + \frac{120}{6^8} + \frac{45}{6^9} + \frac{10}{6^{10}} + \frac{1}{6^{11}}.$$

На следующей странице — ссылка на авторское решение и его скриншот. *Непонятно появление множителя $\frac{1}{10}$ в окончательной формуле автора.* В рамках нашей модели необходимость делить итоговый результат на 10 вроде бы не просматривается.

Официальное решение

Задача 4 Ответ:

$$P(A)=\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{2}{6^2}+\frac{27}{6^3}+\frac{104}{6^4}+\frac{205}{6^5}+\frac{252}{6^6}+\frac{210}{6^7}+\frac{120}{6^8}+\frac{45}{6^9}+\frac{10}{6^{10}}+\frac{1}{6^{11}}\right)=\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{7^{10}}{6^{11}}-11\frac{7^3}{6^5}\right)$$

Решение

Если $n\geq 7$, то перед последним броском, реализующим событие A_n, должно быть реализовано одно из шести несовместных событий $A_{n-1}, A_{n-2}, A_{n-3}, A_{n-4}, A_{n-5}, A_{n-6}$. Тогда

$$A_n = B_1\cdot A_{n-1} + B_2\cdot A_{n-2} + B_3\cdot A_{n-3} + B_4\cdot A_{n-4} + B_5\cdot A_{n-5} + B_6\cdot A_{n-6}, \qquad (3)$$

где $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ – независимые события выпадения 1,2,3,4,5,6 при последнем броске, $P(B_k)=p=\frac{1}{6}$ при всех $k=1,2,3,4,5,6$

С учетом независимости и несовместности событий, из (3) следует рекуррентная формула для определения вероятности $P(A_n)$:

$$P(A_n)=\frac{1}{6}\big(P(A_{n-1})+P(A_{n-2})+P(A_{n-3})+P(A_{n-4})+P(A_{n-5})+P(A_{n-6})\big) \qquad (4)$$

В следующую таблицу занесены вероятности событий, состоящих в том, что при бросании кубика k раз выпало суммарно n очков (ради удобства написаны только числители дробей, знаменатель в каждой строке равен 2^{-k}, при заполнении используется соотношение (4), причем если событие не определено или невозможно, его вероятность равна нулю)

$k\setminus n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
2	0	0	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2
3	0	0	0	1	3	6	10	15	21	25	27	27
4	0	0	0	0	1	4	10	20	35	56	80	104
5	0	0	0	0	0	1	5	15	35	70	126	205
6	0	0	0	0	0	0	1	6	21	56	126	252
7	0	0	0	0	0	0	0	1	7	28	84	210
8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	8	36	120
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	9	45
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	10
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Имеет смысл бросать кубик от двух до одиннадцати раз. Считаем, что любое количество бросаний в этом диапазоне равновероятно. Тогда вероятность того, что при бросании кубика от двух до одиннадцати раз выпадет суммарно 11 очков равна

$$P(A)=\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{2}{6^2}+\frac{27}{6^3}+\frac{104}{6^4}+\frac{205}{6^5}+\frac{252}{6^6}+\frac{210}{6^7}+\frac{120}{6^8}+\frac{45}{6^9}+\frac{10}{6^{10}}+\frac{1}{6^{11}}\right)=\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{7^{10}}{6^{11}}-11\frac{7^3}{6^5}\right)$$