Система с целой частью («Росатом»-2017, 11.5)

Задачи, содержащие целую и дробную части числа, нередко попадаются на олимпиадах и зачастую вызывают сложности у школьников ввиду необычности данной темы.

Давайте посмотрим алгебраическую систему с целыми частями и параметром — это пятая (предпоследняя) задача варианта «Росатома» 2017 года для 11 класса.

Задача. (*«Росатом», 2017, 11.5*) При каких значениях a система

$$\begin{cases} 2[x] - 3[y] = 7, \\ 3x + 2y = a \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Автор дает графическое решение, ну а мы будем решать аналитически! И попутно вспомним, как надо работать с линейными диофантовыми уравнениями, а то в авторском решении этот момент никак не объясняется.

Решение. Обозначим $[x] = p$, $[y] = q$. Тогда первое уравнение системы есть линейное диофантово уравнение

$$2p - 3q = 7. \tag{1}$$

Наиболее простой подход к решению таких уравнений изложен в начале листка «Линейные диофантовы уравнения». В данной ситуации всё просто: число q обязано быть нечетным, иначе левая часть уравнения (1) окажется четной, а правая — нечетной. Таким образом, $q = 2k - 1$ с некоторым целым k; подставляя это в уравнение (1), находим $p = 3k + 2$.

Итак, имеем систему:

$$\begin{cases} [x] = 3k + 2, \\ [y] = 2k - 1, \\ 3x + 2y = a. \end{cases} \tag{2}$$

Первые два уравнения нашей новой системы (2) означают, что

$$3k + 2 \leqslant x < 3k + 3, \tag{3}$$

$$2k - 1 \leqslant y < 2k. \tag{4}$$

Выразим y из третьего уравнения системы (2): $y = \frac{a-3x}{2}$, и подставим в оценку (4):

$$2k - 1 \leqslant \frac{a - 3x}{2} < 2k,$$

откуда после несложных преобразований получим

$$\frac{4k - a}{3} < x \leqslant \frac{a + 2 - 4k}{3}. \tag{5}$$

Система (2) будет иметь единственное решение тогда и только тогда, когда система неравенств (3) и (5) будет иметь единственное решение (ведь y однозначно выражается через x). А это будет иметь место в том единственном случае, когда левая граничная точка промежутка (3) совпадает с правой граничной точкой промежутка (5):

$$3k + 2 = \frac{a + 2 - 4k}{3},$$

откуда $a = 13k + 4$. Всё!

Ответ. $a = 13k + 4$, $k \in \mathbb{Z}$.

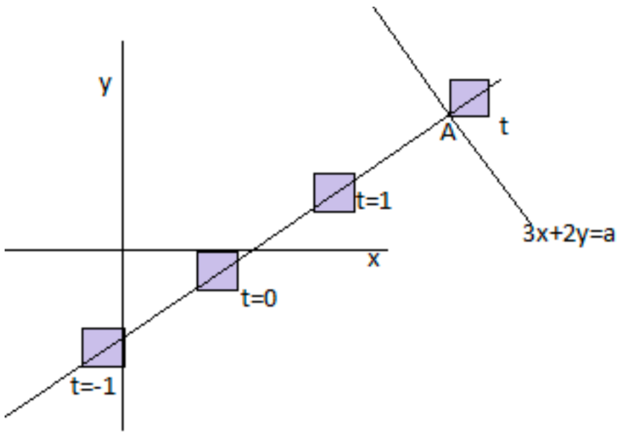
Авторское решение

5. При каких значениях a система $\begin{cases} 2[x] - 3[y] = 7 \\ 3x + 2y = a \end{cases}$ имеет единственное решение? Здесь $[z]$ - целая часть числа z - наибольшее целое число, не превосходящее z .

5. Ответ: $a = 13t + 4, t \in Z$

Решение

Первое уравнение системы – линейное уравнение с целыми решениями, поэтому $\begin{cases} [x] = 3t + 2 \\ [y] = 2t - 1, t \in Z \end{cases}$. Тогда для каждого $t \in Z$ решениями первого уравнения являются пары $(x; y)$, для которых $x \in [3t + 2; 3t + 3)$, $y \in [2t - 1; 2t)$ (квадраты со стороной 1)



Пусть A вершина квадрата с координатами $A(3t + 2; 2t - 1)$, соответствующими целому решению первого уравнения системы. Значение a , при котором прямая $3x + 2y = a$ проходит через точку A искомое: $a = 3(3t + 2) + 2(2t - 1) = 13t + 4, t \in Z$