Уравнение с аркфункциями («Росатом»-2017, 11.2)

Рассмотрим уравнение, которое предлагалось 11-классникам на олимпиаде «Росатом» по математике в 2017 году.

Задача. (*«Росатом», 2017, 11.2*) Решить уравнение

$$\cos\left(\arcsin(\sin x)\right) = \sin\left(\arccos(\cos 2x)\right).$$

Авторское решение строится «изнутри»: имеем $\cos\alpha = \sin\beta$ и давайте посмотрим, как при этом связаны α и β. Ну а мы пойдем «снаружи» и воспользуемся стандартными тождествами

$$\cos(\arcsin t) = \sqrt{1-t^2}, \qquad \sin(\arccos t) = \sqrt{1-t^2} \tag{1}$$

(умеете их доказывать?). Похоже, что наше решение окажется попроще :-)

Решение. В результате применения тождеств (1) уравнение перепишется так:

$$\sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-\cos^2 2x}.$$

Отсюда

$$\sin^2 x = \cos^2 2x \;\Leftrightarrow\; 1-\cos 2x = 1+\cos 4x \;\Leftrightarrow\; \cos 4x + \cos 2x = 0 \;\Leftrightarrow\; 2\cos 3x\cos x = 0.$$

Если $\cos 3x = 0$, то

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3},\; n \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Если же $\cos x = 0$, то $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$, и это множество входит в серию (2) (при $n = 3k+1$). То есть серия (2) — это и есть ответ; и легко видеть, кстати, что авторский ответ можно компактно записать в виде (2).

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Авторское решение

2. Решить уравнение $\cos\left(\arcsin\left(\sin x\right)\right)=\sin\left(\arccos\left(\cos 2x\right)\right)$.

2. Ответ: $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k,\ x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$

Решение

Преобразование:

$$\cos\left(\arcsin\left(\sin x\right)\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\arccos\left(\cos 2x\right)\right)=\cos\left(\arcsin\left(\cos 2x\right)\right)$$

1. $\arcsin(\sin x)=\arcsin(\cos 2x)+2\pi k,\ k\in Z$. Заметим, что $\left|\arcsin\alpha-\arcsin\beta\right|\le\pi$ для любых допустимых α,β, т.е. равенство возможно только $k=0$. С учетом монотонности арксинуса

$$\arcsin(\sin x)=\arcsin(\cos 2x)\to\sin x=\cos 2x\to 2\sin^2 x+\sin x-1=0\to\left[\begin{array}{l}\sin x=1/2\\ \sin x=-1\end{array}\right.$$

Тогда решениями уравнения являются $x_1=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ \ x_2=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$.

2. $\arcsin(\sin x)=-\arcsin(\cos 2x)+2\pi k,\ k\in Z$. По тем же причинам $k=0$ и в силу нечетности арксинуса $\sin x=-\cos 2x\to 2\sin^2 x-\sin x-1=0\to\left[\begin{array}{l}\sin x=-1/2\\ \sin x=1\end{array}\right.$.

Тогда решениями уравнения являются $x_3=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n,\ x_4=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$.

Объединение серий дает ответ $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k,\ x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$