Максимум суммы логарифмов

Посмотрим задачу, которая предлагалась 11-классникам на олимпиаде «Росатом» по математике в 2017 году. Задача не особо сложная (первая в варианте), но мы тут найдем повод не только для упрощения, но и для обобщения :-)

Задача. (*«Росатом», 2017, 11.1*) Отрезок $[2; 29]$ числовой оси разбит двумя точками a и b на три отрезка, длины которых x, y и z соответственно. Найти наибольшее возможное значение выражения $\log_3 x + \log_3 y + \log_3 z$.

Авторское решение состоит в исследовании функции двух переменных на экстремум. Это стандартная техника вузовского курса математического анализа, требующая использования частных производных (которые у автора удачно заметены под ковер). Ну а мы решим задачу чисто алгебраически — с помощью неравенства Коши — и буквально в одну строчку!

Напомним, что для положительных чисел x, y и z (это как раз наш случай) имеет место неравенство Коши (между средним арифметическим и средним геометрическим):

$$\frac{x+y+z}{3} \geqslant \sqrt[3]{xyz}.$$

Равенство достигается в единственном случае $x = y = z$.

Решение. Имеем:

$$\log_3 x + \log_3 y + \log_3 z = \log_3(xyz) = 3\log_3 \sqrt[3]{xyz} \leqslant 3\log_3 \frac{x+y+z}{3} = 3\log_3 \frac{27}{3} = 6.$$

Оценка точна: равенство достигается при $x = y = z = 9$. Значит, наибольшее значение нашего выражения равно 6. Вот и всё решение :-)

«Умным будь — обобщить не забудь!»

Заметим теперь, что задача без труда обобщается на случай разбиения отрезка на какое угодно количество отрезков. Именно, пусть некоторый отрезок длиной n^k (с натуральными n и k) разбит на n отрезков длинами x_1, x_2, …, x_n, и нужно найти максимум суммы логарифмов

$$\log_n x_1 + \log_n x_2 + \ldots + \log_n x_n.$$

Используя неравенство Коши

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n},$$

аналогично предыдущему получаем:

$$\log_n x_1 + \log_n x_2 + \ldots + \log_n x_n = \log_n(x_1 x_2 \ldots x_n) =$$
$$= n\log_n \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leqslant n\log_n \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = n\log_n \frac{n^k}{n} = n(k-1).$$

Равенство достигается при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = n^{k-1}$. Значит, наибольшее значение нашей суммы равно $n(k-1)$.

Разобранная задача с «Росатома» является частным случаем при $n = k = 3$.

Авторское решение

Решения
Задач заключительного тура олимпиады «Росатом» 2016-2017 учебного года
Математика, 11 класс, комплект 4

1. Отрезок $[2;29]$ числовой оси разбит двумя точками a и b на три отрезка, длины которых x, y и z соответственно. Найти наибольшее возможное значение выражения $\log_3 x + \log_3 y + \log_3 z$.

1. Ответ: $f_{\max} = 6$

Решение

$z = 27 - x - y \rightarrow f = \log_3 x + \log_3 y + \log_3 (27 - x - y)$

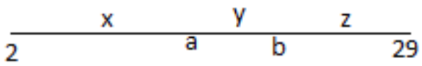

Рис 1

На рис изображено расположение точек a и b , дающее максимальное значение f при $x = x^*, y = y^*, z^* = 27 - x^* - y^*$. Если изменить положение точки a , при этом точку b не менять, то функция $f(x, y^*)$ имеет максимум в точке $x = x^*$, поэтому

$$f'(x, y^*) = \frac{1}{\ln 3}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{27 - x - y^*}\right)\Bigg|_{x=x^*} = 0 \rightarrow \frac{1}{x^*} - \frac{1}{27 - x^* - y^*} = 0$$

Аналогично, зафиксировав положение точки a и, изменяя точку b , приходим у тому, что функция $f(x^*, y)$ имеет максимум при $y = y^*$ и ее производная в этой точке равна нулю.

$$f'(x^*, y) = \frac{1}{\ln 3}\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{27 - x^* - y}\right)\Bigg|_{y=y^*} = 0 \rightarrow \frac{1}{y^*} - \frac{1}{27 - x^* - y^*} = 0$$

Решая совместно систему, приходим к тому, что $x^* = y^* = z^* = 9$ и $f_{\max} = 3\log_3 9 = 6$