Параметрические колебания. Разбор задач МФТИ

Данная статья посвящена довольно редкой и трудной теме — параметрическим электромагнитным колебаниям. За последние 50 лет такие задачи встретились в МФТИ лишь дважды: на письменных вступительных экзаменах 1991 и 2000 годов. Один раз подобная задача предлагалась на Всероссе — на заключительном этапе 2007 года.

На олимпиаде «Физтех» данная тема не появлялась никогда. Но кто знает, вдруг на очередном заключительном этапе её реанимируют? Поэтому стоит быть во всеоружии и обязательно познакомиться с этой замечательной физтеховской классикой.

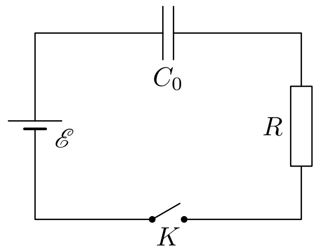
Мы разберём все четыре задачи билетов 1991 года, поскольку они не аналогичны друг другу: в них описываются четыре разные физические ситуации медленного/быстрого изменения ёмкости/индуктивности. Из билетов 2000 года достаточно разобрать лишь одну задачу (остальные на неё в целом похожи).

Данные пять задач приведены в первом разделе без ответов и решений. Попробуйте сначала решить их самостоятельно! Разбор этих задач — далее по тексту.

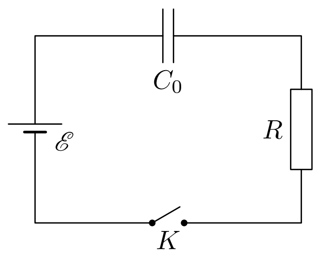
Остальные задачи билетов МФТИ 2000 года и задачу Всеросса-2007 можно найти в листке «Параметрические колебания».

Задачи МФТИ

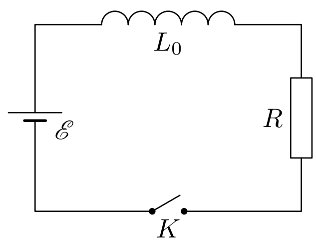
Задача 1. (*МФТИ, 1991*) В схеме, изображённой на рисунке, после замыкания ключа K через некоторое время τ установится стационарный режим. Какая мощность будет выделяться в резисторе R, если начать изменять ёмкость конденсатора по закону $C(t) = C_0(1 + A\sin\omega t)$, $A < 1$? Рассмотреть случай медленных изменений ёмкости, т. е. когда $2\pi/\omega \gg \tau$. Заданными параметрами считать $\mathscr{E}$, C_0, R, A, ω. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.



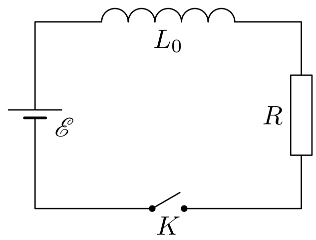
Задача 2. (*МФТИ, 1991*) В схеме, изображённой на рисунке, после замыкания ключа K через некоторое время τ установится стационарный режим. Какая мощность будет выделяться в резисторе R, если начать изменять расстояние между пластинами конденсатора по закону $d(t) = d_0(1 + A\sin\omega t)$, $A < 1$? Рассмотреть случай быстрых изменений ёмкости, т. е. когда $2\pi/\omega \ll \tau$. Заданными параметрами считать $\mathscr{E}$, R, A. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.



Задача 3. (*МФТИ, 1991*) В схеме, изображённой на рисунке, после замыкания ключа K через некоторое время τ установится стационарный режим. Если теперь начать изменять индуктивность по закону $L = L_0(1 + A\sin\omega t)$, где $A < 1$, то ток через резистор R будет также меняться. Найти амплитуду переменной составляющей силы тока с частотой ω. Рассмотреть случай медленных изменений индуктивности, т. е. когда $2\pi/\omega \gg \tau$. Заданными параметрами считать $\mathscr{E}$, L_0, R, A, ω. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

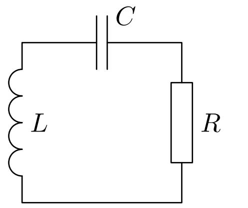


Задача 4. (*МФТИ, 1991*) В схеме, изображённой на рисунке, после замыкания ключа K через некоторое время τ установится стационарный режим. Если теперь начать изменять индуктивность по закону $L = L_0(1 + A\sin\omega t)$, где $A \ll 1$, то в цепи появится переменная составляющая тока с частотой ω. Найти амплитуду этой составляющей. Рассмотреть случай быстрых изменений индуктивности, т. е. когда $2\pi/\omega \ll \tau$. Заданными параметрами считать $\mathscr{E}$, R и A. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.



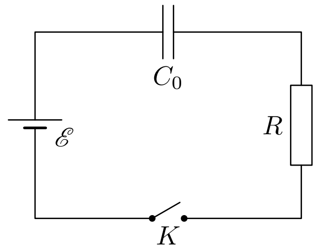
Указание. При $\alpha \ll 1$ можно считать, что $(1+\alpha)^n \approx 1 + n\alpha$.

Задача 5. (*МФТИ, 2000*) Для поддержания незатухающих колебаний в контуре с малым затуханием, изображённом на рисунке, ёмкость конденсатора быстро (по сравнению с периодом колебаний в контуре) увеличивают на небольшую величину ΔC ($\Delta C \ll C$) каждый раз, когда напряжение на нём равно нулю, а через время, равное четверти периода колебаний, так же быстро возвращают в исходное состояние. Определить величину ΔC, если $L = 0{,}1$ Гн, $C = 10^{-7}$ Ф, $R = 30$ Ом.



Разбор задач

Задача 1. (*МФТИ, 1991*) В схеме, изображённой на рисунке, после замыкания ключа K через некоторое время τ установится стационарный режим. Какая мощность будет выделяться в резисторе R, если начать изменять ёмкость конденсатора по закону $C(t) = C_0(1 + A\sin\omega t)$, $A < 1$? Рассмотреть случай медленных изменений ёмкости, т. е. когда $2\pi/\omega \gg \tau$. Заданными параметрами считать $\mathscr{E}$, C_0, R, A, ω. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.



Решение. Поскольку ёмкость меняется медленно, заряд q конденсатора также меняется медленно, поэтому его производная $\dot q$ мала. Но производная заряда по времени — это сила тока I. Значит, ток в цепи мал, и потому напряжение IR на резисторе также является малым. Из правила Кирхгофа

$$\mathscr{E} = U_C + IR$$

мы видим тогда, что напряжение на конденсаторе U_C приблизительно равно $\mathscr{E}$ (и совершает незначительные колебания около величины $\mathscr{E}$ за счет малого слагаемого IR).

Ну а для заряда конденсатора тогда имеем:

$$q = CU_C \approx C\mathscr{E} = C_0(1 + A\sin\omega t)\mathscr{E}.$$

Отсюда сила тока

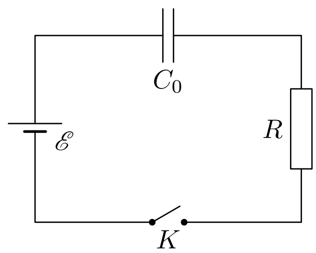
$$I = \dot q = C_0\mathscr{E}A\omega\cos\omega t.$$

Итак, ток совершает (приблизительно) гармонические колебания с амплитудой $I_0 = C_0\mathscr{E}A\omega$. Для искомой средней мощности тогда получаем[1]:

$$P = \left\langle I^2R\right\rangle = I_0^2R\left\langle\cos^2\omega t\right\rangle = I_0^2R\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(C_0\mathscr{E}A\omega)^2R.$$

Ответ. $P \approx \frac{1}{2}(C_0\mathscr{E}A\omega)^2R$.

Задача 2. (*МФТИ, 1991*) В схеме, изображённой на рисунке, после замыкания ключа K через некоторое время τ установится стационарный режим. Какая мощность будет выделяться в резисторе R, если начать изменять расстояние между пластинами конденсатора по закону $d(t) = d_0(1 + A\sin\omega t)$, $A < 1$? Рассмотреть случай быстрых изменений ёмкости, т. е. когда $2\pi/\omega \ll \tau$. Заданными параметрами считать $\mathscr{E}$, R, A. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.



Решение. Поскольку пластины конденсатора двигаются очень быстро, заряд на них не успевает существенно измениться[2]. Следовательно, мы можем счи-

[1]А хорошо ли вам известно, почему среднее значение квадрата косинуса (или синуса) равно $\frac{1}{2}$? На физическом уровне строгости понять это несложно: нарисуйте график функции $y = \cos^2\omega t = \frac{1+\cos 2\omega t}{2}$ и убедитесь, что эта синусоида колеблется вокруг прямой $y = \frac{1}{2}$. Ну а для более глубокого осознания подобных вещей смотрите листок «Среднее значение функции».

[2]Это понятно чисто физически: заряды не успевают толком переместиться в процессе быстрых колебаний пластин. Можно также рассуждать «физически от противного»: предположим, что заряд меняется на какую-то немаленькую величину Δq. Тогда ток в цепи будет порядка $\frac{\Delta q}{T}$, где T — период колебаний пластин. Поскольку этот период очень мал, ток будет огромен и на резисторе будет выделяться огромное тепло. Но такого на опыте не наблюдается. (То есть противоречие здесь не логическое, как в математическом доказательстве от противного, а экспериментальное.)

тать заряд конденсатора приблизительно постоянным и равным его начальному стационарному значению:

$$q \approx q_0 = C_0\mathscr{E} = \frac{\varepsilon_0 S}{d_0}\mathscr{E}.$$

Тогда имеем:

$$\mathscr{E} = \frac{q}{C} + IR \approx \frac{q_0}{C} + IR = \frac{q_0 d}{\varepsilon_0 S} + IR = \frac{q_0 d_0}{\varepsilon_0 S}(1 + A\sin\omega t) + IR = \mathscr{E}(1 + A\sin\omega t) + IR,$$

откуда

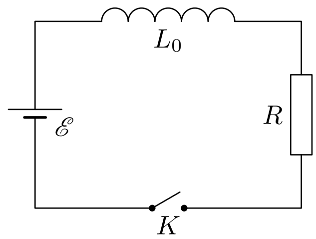
$$I = -\frac{\mathscr{E}A}{R}\sin\omega t.$$

Таким образом, ток совершает (приблизительно) гармонические колебания с амплитудой $I_0 = \frac{\mathscr{E}A}{R}$, поэтому искомая средняя мощность

$$P = \frac{1}{2}I_0^2 R = \frac{(\mathscr{E}A)^2}{2R}.$$

Ответ. $P \approx \frac{(\mathscr{E}A)^2}{2R}$.

Задача 3. (*МФТИ, 1991*) В схеме, изображённой на рисунке, после замыкания ключа K через некоторое время τ установится стационарный режим. Если теперь начать изменять индуктивность по закону $L = L_0(1 + A\sin\omega t)$, где $A < 1$, то ток через резистор R будет также меняться. Найти амплитуду переменной составляющей силы тока с частотой ω. Рассмотреть случай медленных изменений индуктивности, т. е. когда $2\pi/\omega \gg \tau$. Заданными параметрами считать $\mathscr{E}$, L_0, R, A, ω. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.



Решение. В стационарном режиме (то есть при неизменной индуктивности L_0) в цепи течёт постоянный ток $I_0 = \frac{\mathscr{E}}{R}$. При периодическом изменении индуктивности на этот постоянный ток наложится переменная составляющая $I_x(t)$:

$$I = I_0 + I_x(t).$$

Эта переменная составляющая I_x появляется из-за переменной ЭДС индукции катушки. Но при медленном изменении индуктивности магнитный поток Φ через катушку меняется медленно, его производная $\dot{\Phi}$ мала, то есть ЭДС индукции мала. Значит, переменная составляющая I_x также мала: $I_x \ll I_0$. Кроме того, I_x медленно меняется со временем (вслед за ЭДС индукции), поэтому её производная $\dot{I}_x$ (которая по порядку величины равна ωI_x) окажется *малой второго порядка*, и ей впоследствии можно будет пренебречь.

Давайте посмотрим, где именно это произойдёт. Для магнитного потока через катушку имеем:

$$\Phi = LI = L(I_0 + I_x) = LI_0 + LI_x,$$

а для его производной:

$$\dot{\Phi} = \dot{L}I_0 + \dot{L}I_x + L\dot{I}_x = L_0 I_0 A\omega\cos\omega t + L_0 I_x A\omega\cos\omega t + L\dot{I}_x.$$

Первое слагаемое есть малая первого порядка (в её амплитуде содержится лишь малая ω), а второе и третье слагаемые — малые второго порядка (там уже имеются произведения ωI_x). Значит, вторым и третьим слагаемыми можно пренебречь:

$$\dot{\Phi} \approx L_0 I_0 A\omega\cos\omega t$$

(иными словами, оказалось, что при вычислении производной магнитного потока можно считать ток приблизительно постоянным и равным I_0).

По правилу Кирхгофа:

$$\mathscr{E} - \dot{\Phi} = IR,$$

то есть

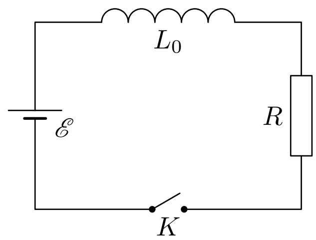
$$\mathscr{E} - L_0 I_0 A\omega \cos\omega t = (I_0 + I_x)R = I_0 R + I_x R,$$

откуда ввиду равенства $\mathscr{E} = I_0 R$ получаем

$$I_x = -\frac{L_0 I_0 A\omega}{R}\cos\omega t = -\frac{L_0 \mathscr{E} A\omega}{R^2}\cos\omega t.$$

Видим отсюда, что I_x меняется со временем по (приблизительно) гармоническому закону с амплитудой $I_{x0} = \frac{L_0 \mathscr{E} A\omega}{R^2}$.

Ответ. $I_{x0} \approx \frac{L_0 \mathscr{E} A\omega}{R^2}$.



Задача 4. (*МФТИ, 1991*) В схеме, изображённой на рисунке, после замыкания ключа K через некоторое время τ установится стационарный режим. Если теперь начать изменять индуктивность по закону $L = L_0(1 + A\sin\omega t)$, где $A \ll 1$, то в цепи появится переменная составляющая тока с частотой ω. Найти амплитуду этой составляющей. Рассмотреть случай быстрых изменений индуктивности, т. е. когда $2\pi/\omega \ll \tau$. Заданными параметрами считать $\mathscr{E}$, R и A. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

Указание. При $\alpha \ll 1$ можно считать, что $(1+\alpha)^n \approx 1 + n\alpha$.

Решение. При быстром изменении индуктивности магнитный поток через катушку не успевает существенно измениться. В самом деле, применим снова физическое доказательство от противного: предположим, что магнитный поток меняется на немаленькую величину $\Delta\Phi$ в течение периода колебаний T. Тогда ЭДС индукции катушки будет порядка $\frac{\Delta\Phi}{T}$ и окажется огромной ввиду малости T. Это приведёт к огромному току в цепи, чего на опыте не наблюдается.

Следовательно, магнитный поток можно считать постоянным и равным Φ_0 — начальному потоку в стационарном режиме:

$$\Phi \approx \Phi_0 = L_0 I_0,$$

где $I_0 = \frac{\mathscr{E}}{R}$ — начальный стационарный ток.

Тогда для тока в цепи получаем:

$$I = \frac{\Phi}{L} = \frac{L_0 I_0}{L_0(1 + A\sin\omega t)} \approx I_0(1 - A\sin\omega t).$$

В последнем равенстве мы воспользовались малостью величины A и приближённой формулой, данной в указании (нашему случаю отвечает значение $n = -1$).

Итак, мы получили

$$I = I_0 - I_0 A\sin\omega t,$$

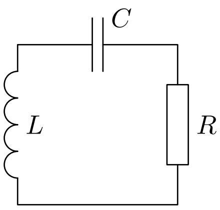
то есть переменная составляющая тока

$$I_x = -I_0 A\sin\omega t.$$

Её амплитуда $I_{x0} = I_0 A = \frac{\mathscr{E} A}{R}$.

Ответ. $I_{x0} \approx \frac{\mathscr{E} A}{R}$.

Задача 5. (*МФТИ, 2000*) Для поддержания незатухающих колебаний в контуре с малым затуханием, изображённом на рисунке, ёмкость конденсатора быстро (по сравнению с периодом колебаний в контуре) увеличивают на небольшую величину ΔC ($\Delta C \ll C$) каждый раз, когда напряжение на нём равно нулю, а через время, равное четверти периода колебаний, так же быстро возвращают в исходное состояние. Определить величину ΔC, если $L = 0{,}1$ Гн, $C = 10^{-7}$ Ф, $R = 30$ Ом.



Решение. Поскольку затухание мало, сопротивление R является малым, и мы можем считать, что в контуре поддерживаются гармонические колебания тока: $I = I_0 \sin \omega t$, где $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Для простоты будем представлять себе, что изменение ёмкости происходит за счёт сдвигания и раздвигания пластин конденсатора[3]. Тогда мы сможем лучше понять с физической точки зрения, что же просходит в контуре. Именно:

- При нулевом заряде на кондесаторе пластины быстро сдвигают, увеличивая тем самым ёмкость на величину ΔC. Поскольку электрическое поле в конденсаторе в данный момент отсутствует, электрические силы не совершают работу и энергия конденсатора не меняется.

- При максимальном заряде на конденсаторе, равном q_0, пластины раздвигают обратно, совершая работу против сил электрического притяжения пластин и увеличивая энергию электрического поля конденсатора (восполняя тем самым тепловые потери на резисторе).

Амплитуду заряда q_0 мы выразим из закона сохранения энергии, пренебрегая малым затуханием:

$$\frac{q_0^2}{2C} = \frac{LI_0^2}{2},$$

откуда

$$q_0^2 = LCI_0^2.$$

Тогда работа по раздвиганию пластин:

$$A = \frac{q_0^2}{2C} - \frac{q_0^2}{2(C + \Delta C)} = \frac{q_0^2 \Delta C}{2C(C + \Delta C)} \approx \frac{q_0^2 \Delta C}{2C^2} = \frac{LCI_0^2 \Delta C}{2C^2} = \frac{LI_0^2 \Delta C}{2C}.$$

Эта работа совершается дважды за период колебаний T и должна компенсировать тепловые потери Q на резисторе за период:

$$Q = 2A.$$

Остаётся найти Q. Имеем:

$$dQ = I^2 R dt = I_0^2 R \sin^2 \omega t \, dt,$$

откуда

$$Q = I_0^2 R \int\limits_0^T \sin^2 \omega t \, dt = I_0^2 R \int\limits_0^T \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} \, dt = \frac{1}{2} I_0^2 R \left(t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \right) \Bigg|_0^T = \frac{1}{2} I_0^2 R T.$$

Отсюда с учётом формулы Томсона $T = 2\pi\sqrt{LC}$ окончательно получаем:

$$Q = I_0^2 R \pi \sqrt{LC}.$$

[3]Хотя это и не обязательно — можно, например, изменять площадь перекрытия пластин, вращая их туда-сюда, или же задвигать внутрь конденсатора диэлектрик и выдвигать его обратно.

Теперь поставляем в равенство $Q = 2A$ найденные выражения для Q и A:

$$I_0^2 R\pi\sqrt{LC} = 2 \cdot \frac{LI_0^2 \Delta C}{2C},$$

откуда искомое изменение ёмкости

$$\Delta C = \pi RC\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Ответ. $\Delta C = \pi RC\sqrt{\frac{C}{L}} \approx 9{,}4 \cdot 10^{-9}$ Ф

Заметим напоследок, что выражение для Q можно было написать и без всякого интегрирования, если использовать «эффективное» (или «действующее») значение тока $I_{\text{eff}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$. Тогда немедленно:

$$Q = I_{\text{eff}}^2 RT = \frac{1}{2} I_0^2 RT.$$

Однако желательно чётко понимать, откуда берётся выражение для эффективного значения тока — а выводится оно через интегрирование именно так, как мы и сделали.