Уравнение с аркфункциями (ОММО-2022.6)

Разбираем задачу номер 6 из варианта Объединенной межвузовской математической олимпиады 2022 года.

Задача. (*ОММО, 2022.6*) Решите уравнение

$$\arcsin\frac{x\sqrt{11}}{2\sqrt{21}}+\arcsin\frac{x\sqrt{11}}{4\sqrt{21}}=\arcsin\frac{5x\sqrt{11}}{8\sqrt{21}}.$$

Авторское решение выглядит очень громоздко. Мы постараемся упростить его с помощью промежуточных замен переменной. Такие приемы позволят вам сэкономить драгоценное время на олимпиаде.

Решение. Сразу делаем замену

$$t=\frac{x\sqrt{11}}{8\sqrt{21}} \tag{1}$$

и приходим к уравнению

$$\arcsin 4t+\arcsin 2t=\arcsin 5t. \tag{2}$$

ОДЗ данного уравнения определяется системой неравенств $|4t|\leqslant 1$, $|2t|\leqslant 1$, $|5t|\leqslant 1$, которая дает

$$-\frac{1}{5}\leqslant t\leqslant\frac{1}{5}. \tag{3}$$

Уравнение (2) равносильно системе

$$\begin{cases}5t=\sin\bigl(\arcsin 4t+\arcsin 2t\bigr),\\ -\dfrac{\pi}{2}\leqslant\arcsin 4t+\arcsin 2t\leqslant\dfrac{\pi}{2}.\end{cases} \tag{4}$$

Преобразуем первое уравнение данной системы:

$$5t=\sin(\arcsin 4t)\cos(\arcsin 2t)+\cos(\arcsin 4t)\sin(\arcsin 2t)=4t\sqrt{1-4t^2}+2t\sqrt{1-16t^2}$$

(мы воспользовались тождествами $\cos(\arcsin a)=\sqrt{1-a^2}$ и $\sin(\arccos a)=\sqrt{1-a^2}$).

Одним из корней полученного уравнения является $t=0$. Ему соответствует значение $x=0$, которое, очевидно, является корнем исходного уравнения. Остальные корни ищем, решая уравнение

$$4\sqrt{1-4t^2}+2\sqrt{1-16t^2}=5. \tag{5}$$

Мы не будем возводить его дважды в квадрат (как у автора), а введем двойную замену

$$a=\sqrt{1-4t^2},\quad b=\sqrt{1-16t^2}.$$

Тогда вместо уравнения (5) имеем систему

$$\begin{cases}4a+2b=5,\\ 4a^2-b^2=3\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}2a+b=\dfrac{5}{2},\\ (2a-b)(2a+b)=3,\end{cases}$$

откуда легко находим $a = \frac{37}{40}$, $b = \frac{13}{20}$. Теперь нужно найти t (неважно как — через a или через b, давайте через a):

$$\sqrt{1-4t^2} = \frac{37}{40},$$

откуда

$$t^2 = \frac{231}{6400}, \quad t = \pm\frac{\sqrt{231}}{80}.$$

Полученные значения t удовлетворяют ограничению (3):

$$|t| = \frac{\sqrt{231}}{80} < \frac{\sqrt{256}}{80} = \frac{16}{80} = \frac{1}{5}.$$

Остается проверить, выполнено ли неравенство системы (4), а именно — ограничение

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha + \beta \leqslant \frac{\pi}{2}, \tag{6}$$

где $\alpha = \arcsin 4t$, $\beta = \arcsin 2t$. Будучи арксинусами, α и β принимают значения на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, поэтому сумма $\alpha + \beta$ принимает значения на отрезке $[-\pi, \pi]$. Следовательно, для проверки условия (6) нам достаточно выяснить знак косинуса этой суммы:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \sqrt{1-16t^2}\cdot\sqrt{1-4t^2} - 4t\cdot 2t =$$
$$= ab - 8t^2 = \frac{37}{40}\cdot\frac{13}{20} - 8\cdot\frac{231}{6400} = \frac{37\cdot 13}{800} - \frac{231}{800} > 0.$$

Итак, неравенство (6) выполнено, и потому значения $t = \pm\frac{\sqrt{231}}{80}$ являются корнями уравнения (2). Остается найти x из (1):

$$x = t\cdot\frac{8\sqrt{21}}{\sqrt{11}} = \pm\frac{\sqrt{231}}{80}\cdot\frac{8\sqrt{21}}{\sqrt{11}} = \pm\frac{21}{10}.$$

Ответ. $0, \pm\frac{21}{10}$.

Авторское решение

Задача 6. Решите уравнение $\arcsin\frac{x\sqrt{11}}{2\sqrt{21}}+\arcsin\frac{x\sqrt{11}}{4\sqrt{21}}=\arcsin\frac{5x\sqrt{11}}{8\sqrt{21}}$.

Ответ: 0, $\pm\frac{21}{10}$

Решение. Из условия на область определения арксинуса вытекает, что

$$|x|\leqslant\frac{8\sqrt{21}}{5\sqrt{11}},\text{ или, равносильно, } x^2\leqslant\frac{1344}{275}. \qquad (*)$$

Вычисляя синус от обеих частей уравнения и учитывая, что

$$\cos\arcsin t>0$$

и, следовательно,

$$\sin(\arcsin t)=t,\text{ и } \cos(\arcsin t)=\sqrt{1-t^2},$$

получаем

$$\frac{x\sqrt{11}}{2\sqrt{21}}\cdot\sqrt{1-\frac{11x^2}{16\cdot 21}}+\frac{x\sqrt{11}}{4\sqrt{21}}\cdot\sqrt{1-\frac{11x^2}{4\cdot 21}}=\frac{5x\sqrt{11}}{8\sqrt{21}}.$$

Перенося все в левую часть уравнения, упрощая и вынося общим множитель за скобки, имеем

$$\frac{x\sqrt{11}}{8\cdot 21}\left(\sqrt{336-11x^2}+\sqrt{84-11x^2}-5\sqrt{21}\right)=0$$

Из данного уравнения следует, что или $x=0$ (который, очевидно, подходит), или x является корнем уравнения

$$\sqrt{336-11x^2}+\sqrt{84-11x^2}=5\sqrt{21}.$$

Из условия (*) следует, что все подкоренные выражения положительны. Поскольку обе части уравнения положительны, то их можно возвести в квадрат

$$336-11x^2+2\sqrt{(336-11x^2)(84-11x^2)}+84-11x^2=525.$$

Перенося всё кроме корня в правую часть уравнения, имеем

$$2\sqrt{(336-11x^2)(84-11x^2)}=22x^2+105.$$

Возводя ещё раз обе части уравнения в квадрат, получаем

$$4(336-11x^2)(84-11x^2)=484x^4+4620x^2+11025,$$

или

$$23100x^2=101871.$$

Таким образом, уравнение имеет ещё два возможных корня

$$x=\pm\frac{21}{10}.$$

Проверка. Проверяем, что левая часть уравнения при данных значениях аргумента лежит в промежутке $[-\pi/2;\pi/2]$. Для этого вычисляем косинус левой части

$$\cos\left(\arcsin\frac{x\sqrt{11}}{2\sqrt{21}}+\arcsin\frac{x\sqrt{11}}{4\sqrt{21}}\right)=\sqrt{\left(1-\frac{11x^2}{4\cdot 21}\right)\left(1-\frac{11x^2}{16\cdot 21}\right)}-\frac{11x^2}{8\cdot 21}=$$

$$=\sqrt{\left(1-\frac{11\cdot 21}{4\cdot 100}\right)\left(1-\frac{11\cdot 21}{16\cdot 100}\right)}-\frac{11\cdot 21}{8\cdot 100}=\frac{13\cdot 37}{800}-\frac{11\cdot 21}{800}>0.$$

Поскольку значения косинуса положительно, а левая часть лежит в промежутке $[-\pi;\pi]$, то она лежит в промежтке $[-\pi/2;\pi/2]$. Значит, все найденные числа являются решением задания.