Муха и велосипедист

Данная статья предназначена для школьников 7–9 классов и посвящена определенному типу задач, в которых фигурирует средняя скорость. Ключевая задача тут — про муху и велосипедиста; оказывается, что к ней сводятся некоторые другие задачи на «курсирование туда-сюда» (в каждой такой задаче достаточно будет лишь понять, кто тут муха, а кто — велосипедист).

Мы начнем с самых элементарных вещей — с двух базовых задач на среднюю скорость. Посмотрим, как они помогают решать чуть более сложные задачи. Ну а затем перейдем к мухе и велосипедисту, после чего нас ждут регион Максвелла и заключительный этап Всеросса!

1 Средняя скорость

Первые две задачи должен знать каждый семиклассник. Из этих базовых задач, как из кирпичиков, могут порой складываться более сложные задачи (что мы и увидим ниже).

Задача 1. Первую половину времени тело двигалось со скоростью v_1, вторую половину времени — со скоростью v_2. Чему равна средняя скорость тела?

Решение. Пусть общее время движения равно $2t$. Тогда путь за первую половину времени равен v_1t, путь за вторую половину времени равен v_2t, а общий путь

$$s = v_1t + v_2t = (v_1 + v_2)t,$$

откуда средняя скорость

$$v_{\text{ср}} = \frac{s}{2t} = \frac{(v_1 + v_2)t}{2t} = \frac{v_1 + v_2}{2}. \tag{1}$$

Как видим, средняя скорость в данном случае есть *среднее арифметическое* скоростей v_1 и v_2.

Задача 2. Первую половину пути тело двигалось со скоростью v_1, вторую половину пути — со скоростью v_2. Чему равна средняя скорость тела?

Решение. Обозначим $2x$ общий путь тела. Общее время движения тогда равно $\frac{2x}{v_{\text{ср}}}$. С другой стороны общее время есть сумма времен прохождения первой и второй половин пути:

$$\frac{2x}{v_{\text{ср}}} = \frac{x}{v_1} + \frac{x}{v_2},$$

откуда

$$\frac{2}{v_{\text{ср}}} = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}.$$

Как видим, средняя скорость в данном случае есть *среднее гармоническое*[1] скоростей v_1 и v_2. Имеем далее:

$$\frac{2}{v_{\text{ср}}} = \frac{v_1 + v_2}{v_1v_2},$$

откуда

$$v_{\text{ср}} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}. \tag{2}$$

[1] Средним гармоническим чисел a и b называется такое число c, что $\frac{2}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. Иными словами, это число, обратное к которому есть среднее арифметическое обратных к a и b.

Следующие задачи 3, 4 и 5 легко решаются с помощью формулы (2). Мы не приводим решений; сделайте эти задачи самостоятельно.

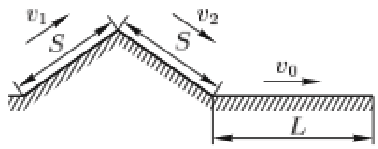
Задача 3. (*Всеросс., 2019, МЭ, 7*) Автомобиль, едущий по круговой трассе, проходит один круг со средней путевой скоростью $V_1 = 30$ км/ч и начинает новый круг. С какой постоянной скоростью он должен проехать второй круг для того, чтобы эта скорость оказалась в два раза больше средней путевой скорости за два круга?

Ответ: 90 км/ч

Задача 4. (*«Физтех», 2016, 7*) Машина половину пути ехала со скоростью на 5 км/ч быстрее средней скорости, а вторую половину пути со скоростью в полтора раза меньшей средней. Определите среднюю скорость машины.

Ответ: 5 км/ч.

Задача 5. (*Всеросс., 2010, РЭ, 7*) Турист перешёл через симметричный перевал (см. рисунок) и пошёл далее по равнине. Его средняя скорость на пути через перевал оказалась равной $v_{\text{ср}} = 2{,}1$ км/ч.



Какое расстояние L турист прошёл по равнине, если для этого ему потребовалось два часа?

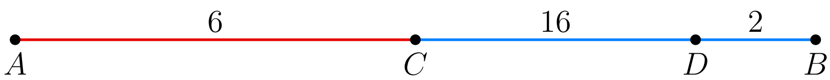
Известно, что при подъёме на перевал его скорость v_1 составляла 0,6 от скорости v_0 движения по равнине, а при спуске с перевала скорость v_2 была больше скорости подъёма в 7/3 раза.

Ответ: 5 км.

Продолжаем. Формулы (1) и (2) симпатичным образом комбинируются в следующей задаче.

Задача 6. (*Всеросс., 2013, МЭ, 7*) Турист пошёл в поход и преодолел некоторое расстояние. При этом первую половину пути он шёл со скоростью 6 км/ч, половину оставшегося времени ехал на велосипеде со скоростью 16 км/ч, а оставшийся путь поднимался в гору со скоростью 2 км/ч. Определите среднюю скорость туриста за время его движения.

Решение. Пусть турист преодолел расстояние AB. Точка C — середина AB (красный отрезок равен синему). В точке D турист оставил велосипед и пошел пешком. Над каждым отрезком написана скорость его прохождения.



Время на отрезке CD равно времени на DB, поэтому среднюю скорость на синем отрезке находим по формуле (1):

$$v_{CB} = \frac{16+2}{2} = 9 \text{ км/ч}.$$

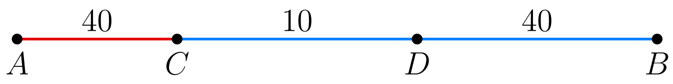
Ну то есть мы можем считать, что синий отрезок турист преодолел с постоянной скоростью 9 км/ч. А поскольку красный путь равен синему, то работает формула (2):

$$v_{\text{ср}} = \frac{2 \cdot 6 \cdot 9}{6+9} = \frac{108}{15} = 7{,}2 \text{ км/ч}.$$

Вот еще один пример применения формулы (2).

Задача 7. (*«Физтех», 2014, 8*) Треть всего времени автомобиль ехал со скоростью $v_1 = 40$ м/с, затем половину оставшегося пути он ехал со скоростью $v_2 = 10$ м/с, а на оставшемся участке его скорость была $v_3 = 40$ м/с. Найдите среднюю скорость автомобиля.

Решение. Делаем аналогичный рисунок, только теперь $CD = DB$.



Средняя скорость на синем отрезке находится по формуле (2):

$$v_{CB} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 40}{10 + 40} = 16 \text{ км/ч}.$$

Пусть общее время движения равно $3t$; тогда красное время равно t, а синее время равно $2t$. Для искомой средней скорости имеем:

$$v_{\text{ср}} = \frac{40 \cdot t + 16 \cdot 2t}{3t} = \frac{72t}{3t} = 24 \text{ км/ч}.$$

2 Муха и велосипедист

Если с предыдущими задачами всё понятно, то можно повысить градус сложности и перейти к самой главной задаче — про муху и веловипедиста.

Задача 8. (*Муха и велосипедист*) У обочины прямолинейного шоссе стоит столб, а на столбе сидит муха. По шоссе двигается велосипедист с постоянной скоростью v_0, приближаясь к столбу. В тот момент, когда расстояние между велосипедистом и столбом равно L, муха вылетает навстречу велосипедисту со скоростью v_1. Встретив велосипедиста, муха мгновенно разворачивается и летит назад со скоростью v_2, оставляя велосипедиста позади ($v_2 > v_0$). Поравнявшись со столбом, муха опять разворачивается и летит навстречу велосипедисту со скоростью v_1, потом — опять назад со скоростью v_2, и так далее.

1) Какое расстояние пролетела муха к тому моменту, когда велосипедист доехал до столба?

2) Сколько времени муха провела на пути в одну сторону, и сколько — в другую?

Решение. Пусть муха, начав в очередной раз движение от столба, пролетает до встречи с велосипедистом путь ℓ. Тогда обратный путь мухи до столба тоже равен ℓ, и это значит, что средняя скорость мухи за один пролет туда-сюда равна

$$v_{\text{ср}} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}.$$

Во всех пролетах эта средняя скорость одна и та же, поэтому ясно, что это будет средняя скорость мухи за всё время движения.

Ну а всё время движения есть время сближения велосипедиста со столбом, то есть $\frac{L}{v_0}$. Следовательно, муха пролетит расстояние

$$s = v_{\text{ср}} \cdot \frac{L}{v_0} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}\frac{L}{v_0}.$$

Двигаясь от столба к велосипедисту со скоростью v_1, муха пролетает суммарно расстояние $s/2$. Значит, общее время движения мухи от столба к велосипедисту равно

$$t_1 = \frac{s/2}{v_1} = \frac{v_2}{v_1 + v_2}\frac{L}{v_0}.$$

Аналогично общее время движения мухи от веловипедиста к столбу равно

$$t_2 = \frac{s/2}{v_2} = \frac{v_1}{v_1 + v_2}\frac{L}{v_0}.$$

Ответ: 1) $s = \frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}\frac{L}{v_0}$; 2) $t_1 = \frac{v_2}{v_1+v_2}\frac{L}{v_0}$, $t_2 = \frac{v_1}{v_1+v_2}\frac{L}{v_0}$.

3 Максвелл и Всеросс

Ну а теперь идем дальше и применим идею про муху и велосипедиста в двух задачах достаточно высокого уровня!

Задача 9. (*Олимпиада Максвелла, 2019, РЭ, 8*) От станции Простоквашино до дома, в котором живёт кот Матроскин, расстояние $s = 1{,}2$ км. Дядя Фёдор с Шариком приехал на станцию Простоквашино и пошёл домой вниз по склону со скоростью $v_ф = 4$ км/ч, а Шарик побежал со скоростью $v_{ш,1} = 12$ км/ч. Добежав до дома, Шарик повернул обратно и побежал вверх по склону навстречу дяде Фёдору со скоростью $v_{ш,2} = 8$ км/ч. Так пёс бегал вперед и назад между дядей Фёдором и домом вплоть до момента прибытия мальчика домой. Какой путь больше: суммарный путь S_1, который Шарик пробежал, перемещаясь в сторону дома, или S_2, который он пробежал, перемещаясь в обратном направлении? На сколько один путь длиннее другого? Определите S_1 и S_2.

Решение. На первый взгляд ситуация отличается от задачи про муху велосипедиста, поскольку Шарик стартует первоначально не от неподвижного дома, а от движущегося дяди Фёдора (словно бы муха стартует первоначально не со столба, а с плеча велосипедиста). Но это совершенно не проблема — давайте перейдем в систему отсчета дяди Фёдора!

В этой СО дядя Фёдор неподвижен, и он будет играть роль столба. Велосипедистом будет дом, который движется на дядю Фёдора со скоростью

$$v_0 = v_ф = 4 \text{ км/ч}.$$

Ну а муха — это Шарик, который движется от дяди Фёдора к дому (то есть от столба к велосипедисту) со скоростью

$$v_1 = v_{ш,1} - v_ф = 12 - 4 = 8 \text{ км/ч},$$

а обратно (от велосипедиста к столбу) — со скоростью

$$v_2 = v_{ш,1} + v_ф = 8 + 4 = 12 \text{ км/ч}.$$

Теперь пользуемся результатами предыдущей задачи. Суммарное время движения Шарика от дяди Фёдора к дому:

$$t_1 = \frac{v_2}{v_1 + v_2}\frac{s}{v_0} = \frac{12}{8+12}\frac{1{,}2}{4} = 0{,}18 \text{ ч}.$$

Суммарное время движения Шарика в обратном направлении:

$$t_2 = \frac{v_1}{v_1 + v_2}\frac{s}{v_0} = \frac{8}{8+12}\frac{1{,}2}{4} = 0{,}12 \text{ ч}.$$

Всё, система отсчета дяди Фёдора свое дело сделала: мы нашли времена движения Шарика на пути туда и на пути обратно. Для нахождения длин этих путей возвращаемся в неподвижную СО и легко находим:

$$S_1 = v_{ш,1}t_1 = 12 \cdot 0{,}18 = 2{,}16 \text{ км}.$$
$$S_2 = v_{ш,2}t_2 = 8 \cdot 0{,}12 = 0{,}96 \text{ км}.$$

Для сравнения посмотрите авторское решение.

Убедитесь, что вам тут всё понятно, и попробуйте (никуда не подлядывая!) решить следующую задачу. Ведь она точно такая же!

Задача 10. (*«Шаг в будущее», 2022, 9*) Илья Муромец верхом на Бурке по ровной прямой дороге отправился из Алёшино в Добрынино. Расстояние между деревнями 50 км. Скорость движения Ильи 10 км/ч. Как только они тронулись в путь, Бурка стряхнул с себя муху-цокотуху. Муха полетела прямо в Добрынино и, долетев туда, сразу полетела обратно к Бурке, тот снова стряхнул цокотуху, она опять полетела прямо в Добрынино и т. д. пока Илья не прибыл в пункт назначения. Определить полный путь цокотухи, если во время путешествия Илье постоянно дул попутный ветер со скоростью 5 км/ч, а собственная скорость мухи 15 км/ч.

Ответ: $S = \frac{250}{3}$ км.

Всё получилось? Отлично! Теперь нас ждет финал Всеросса.

Задача 11. (*Всеросс., 2006, ЗЭ, 9*) По реке, скорость течения которой u, навстречу друг другу плывут два однотипных теплохода. В некоторый момент времени, когда один из теплоходов проплывал мимо пункта A, а другой — мимо пункта B, из A в B отплыл быстроходный катер, который стал курсировать между теплоходами вплоть до их встречи. Какой путь L_x относительно берега реки проплыл катер? Расстояние от A до B вдоль фарватера реки равно L. В стоячей воде скорость теплоходов равна v, а катера — V. Пункт A находится выше пункта B по течению реки. Как изменится ответ, если катер стартует из пункта B?

Решение. В неподвижной системе отсчета имеем:

- теплоход A плывет со скоростью $v_A = v + u$;
- теплоход B плывет навстречу со скоростью $v_B = v - u$;
- катер плывет со скоростью $V_{AB} = V + u$ по направлению $A \to B$ и со скоростью $V_{BA} = V - u$ в обратном направлении.

Перейдем в систему отсчета теплохода A. В ней теплоход A покоится и играет роль столба. Велосипедистом будет теплоход B, который движется со скоростью

$$v_0 = v_A + v_B = (v + u) + (v - u) = 2v.$$

Муха — это катер. От столба к велосипедисту (то есть в направлении $A \to B$) он движется со скоростью

$$v_1 = V_{AB} - v_A = (V + u) - (v + u) = V - v.$$

В обратном направлении катер движется со скоростью

$$v_2 = V_{BA} + v_A = (V - u) + (v + u) = V + v.$$

Суммарное время движения катера в направлении $A \to B$:

$$t_1 = \frac{v_2}{v_1 + v_2}\frac{L}{v_0} = \frac{V + v}{2V}\frac{L}{2v} = \frac{(V + v)L}{4Vv}.$$

Суммарное время движения катера в направлении $B \to A$:

$$t_2 = \frac{v_1}{v_1 + v_2}\frac{L}{v_0} = \frac{V - v}{2V}\frac{L}{2v} = \frac{(V - v)L}{4Vv}.$$

После нахождения этих времен (как и в предыдущей задаче) возвращаемся в неподвижную СО и находим путь катера:

$$L_x = V_{AB}t_1 + V_{BA}t_2 = (V + u)\frac{(V + v)L}{4Vv} + (V - u)\frac{(V - v)L}{4Vv}.$$

Выполнив очевидные преобразования, окончательно получим:

$$L_x = \frac{V^2 + uv}{2vV} L.$$

Случай, когда катер стартует из пункта B, теперь разобрать труда не составит. Сделайте это самостоятельно! Результат такой:

$$L_y = \frac{V^2 - uv}{2vV} L.$$

Для сравнения посмотрите авторское решение.

Авторское решение (Максвелл-2019)

LIII Всероссийская олимпиада школьников по физике. Региональный этап. Теоретический тур. 21 января 2019 г.

8 класс

Задача 1. Каникулы в Простоквашино (2). От станции Простоквашино до дома, в котором живёт кот Матроскин, расстояние s = 1,2 км. Дядя Фёдор с Шариком приехал на станцию Простоквашино и пошёл домой вниз по склону со скоростью $\upsilon_Ф$ = 4 км/ч, а Шарик побежал со скоростью $\upsilon_{Ш,1}$ = 12 км/ч. Добежав до дома Шарик повернул обратно и побежал вверх по склону навстречу дяде Фёдору со скоростью $\upsilon_{Ш,2}$ = 8 км/ч. Так пёс бегал вперед и назад между дядей Фёдором и домом вплоть до момента прибытия мальчика домой. Какой путь больше: суммарный путь S_1, который Шарик пробежал, перемещаясь в сторону дома или S_2 который он пробежал, перемещаясь в обратном направлении. На сколько один путь длиннее другого? Определите S_1 и S_2.

Возможное решение. Пусть S_1 – путь, который Шарик пробежал, перемещаясь в сторону дома, а S_2 – путь, который он пробежал перемещаясь в обратном направлении. Тогда $S_1 - S_2 = s$, или

$$\upsilon_{Ш,1}T_1 - \upsilon_{Ш,2}T_2 = s. \quad (1)$$

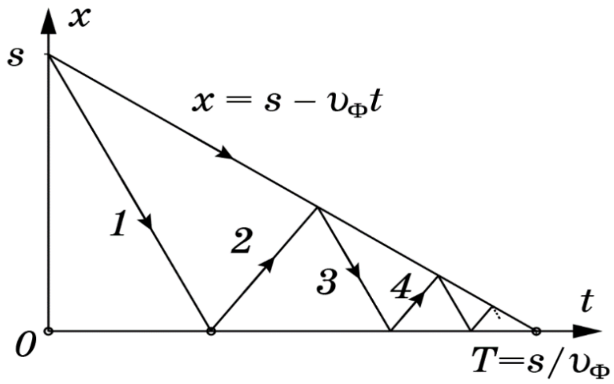


Рис. 2

Сумма времен T_1 и T_2 дает общее время движения дяди Фёдора: $T_1 + T_2 = \dfrac{s}{\upsilon_Ф}$, (2)

которое, разумеется, совпадает с полным временем движения Шарика.

Решая систему уравнений (1-2), находим:

$$T_1 = \frac{\upsilon_{Ш,2} + \upsilon_Ф}{\upsilon_{Ш,1} + \upsilon_{Ш,2}} \frac{s}{\upsilon_Ф} = 0{,}18 \text{ часа}$$

$$T_2 = \frac{\upsilon_{Ш,1} - \upsilon_Ф}{\upsilon_{Ш,1} + \upsilon_{Ш,2}} \frac{s}{\upsilon_Ф} = 0{,}12 \text{ часа.}$$

$$S_1 = \upsilon_{Ш,1}T_1 = s\frac{\upsilon_{Ш,1}}{\upsilon_Ф} \frac{\upsilon_{Ш,2} + \upsilon_Ф}{\upsilon_{Ш,1} + \upsilon_{Ш,2}} = 2{,}16 \text{ км},$$

$$S_2 = \upsilon_{Ш,2}T_2 = s\frac{\upsilon_{Ш,2}}{\upsilon_Ф} \frac{\upsilon_{Ш,1} - \upsilon_Ф}{\upsilon_{Ш,1} + \upsilon_{Ш,2}} = 0{,}96 \text{ км.}$$

$$S_1 - S_2 = s = 1{,}2 \text{ км.}$$

Авторское решение (Всеросс-2006)

Задача 2. Курсирующий катер

Средняя скорость катера $v_{\text{ср}}$ на участке реки от одного теплохода до другого и обратно — величина постоянная. Поэтому искомый путь, пройденный катером, равен произведению этой скорости на общее время его курсирования: $t_0 = L/2v$. Найдём $v_{\text{ср}}$. Время, затраченное катером на путь до первой встречи с теплоходом B, равно

$$t_1 = \frac{L}{v+V}.$$

Пусть катер стартует по течению реки, тогда за время t_1 он преодолеет расстояние

$$L_1 = t_1(V+u) = L\frac{V+u}{v+V},$$

а вышедший вместе с ним теплоход A проплыл расстояние

$$L_T = t_1(v+u) = L\frac{v+u}{v+V}.$$

Когда катер повернул обратно, расстояние между ним и теплоходом A составляло

$$L_{KT} = L_1 - L_T = t_1\left((V+u)-(v+u)\right) = L\frac{V-v}{v+V}.$$

На путь до встречи с теплоходом A потребовалось время

$$t_2 = \frac{L_{KT}}{v+V} = L\frac{V-v}{(v+V)^2}.$$

За это время катер покрыл расстояние

$$L_2 = t_2(V-u) = L\frac{(V-u)(V-v)}{(v+V)^2}.$$

Средняя скорость катера

$$v_{\text{ср}} = \frac{L_1+L_2}{t_1+t_2} = \frac{V^2+uv}{V}.$$

Из этой формулы видно, что средняя скорость катера относительно берегов не зависит от расстояния между теплоходами. Отсюда находим искомый путь

$$L_x = v_{\text{ср}}t_0 = L\frac{V^2+uv}{2vV}.$$

Если бы катер стартовал против течения реки, то во всех формулах следовало бы заменить u на $(-u)$. В этом случае

$$L_x = v_{\text{ср}}t_0 = L\frac{V^2-uv}{2vV}.$$