Сумма трех квадратов

Посмотрим задачу с олимпиады «Надежда энергетики» 2018 года (9 класс, номер 5).

Задача. (*«Надежда энергетики», 2018, 9.5*) Найдите количество всех упорядоченных троек (x, y, z) чисел множества $\{1, 2, \ldots, 70\}$ для которых сумма $x^2 + y^2 + z^2$ кратна 7.

В своем решении автор забыл, что просил найти количество *упорядоченных* троек, и нашел количество неупорядоченных. Поправим дело!

Решение. Квадраты целых чисел при делении на 7 могут давать лишь остатки 0, 1, 2 и 4. Давайте покрасим все целые числа следующим образом.

- Белые числа — их квадраты дают остаток 0 при делении на 7. Это просто числа, кратные семи.
- Красные числа — их квадраты дают остаток 1 при делении на 7. Это числа, дающие остаток 1 или 6 при делении на 7.
- Синие числа — их квадраты дают остаток 2 при делении на 7. Это числа, дающие остаток 3 или 4 при делении на 7.
- Черные числа — их квадраты дают остаток 4 при делении на 7. Это числа, дающие остаток 2 или 5 при делении на 7.

Множество $\{1, 2, \ldots, 70\}$ разбиваем на 10 семерок подряд идущих чисел:

$$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7),\ (8, 9, 10, 11, 12, 13, 14),\ \ldots,\ (64, 65, 66, 67, 68, 69, 70).$$

Каждая семерка дает одну и ту же последовательность цветов:

$$\underbrace{(\texttt{КЧССЧКБ})(\texttt{КЧССЧКБ})\ldots(\texttt{КЧССЧКБ})}_{\text{10 блоков}}.$$

Ясно, что делимость нашей суммы квадратов на 7 можно получить лишь двумя способами: взяв либо три белых числа (сумма остатков $0 + 0 + 0$), либо красное, синее и черное (сумма остатков $1 + 2 + 4$). Рассмотрим эти случаи по отдельности.

- *Белый случай.* У нас десять белых чисел, нам нужно выбрать три. Числа могут повторяться, поэтому вариантов выбора $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$.
- *Красно-сине-черный случай.* У нас 20 красных, 20 синих и 20 черных чисел. Комбинацию букв `КЧС` выбираем 20^3 способами, после чего умножаем на 3! перестановок этих букв. Итго имеем $20^3 \cdot 3! = 48000$ вариантов.

В итоге искомое число упорядоченных троек равно $1000 + 48000 = 49000$.

Авторское решение (→ оригинал)

Задача 5.

Найдите количество всех упорядоченных троек (x, y, z) чисел множества $\{1, 2, \ldots, 70\}$, для которых сумма

$$x^2 + y^2 + z^2$$

кратна 7.

Решение.

1. Рассмотрим остатки $r(x)$ от деления чисел x на 7:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	…	69	70
$r(x)$	1	4	2	2	4	1	0	1	4	2	2	4	1	0	1	…	1	0

Они циклически повторяются 10 раз.

2. Найдем перебором неупорядоченные тройки $R = \{r(x_1), r(x_2), r(x_3)\}$, для к-рых
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ кратно 7:

$r(x_1)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	2	2	2	4
$r(x_2)$	0	0	0	0	1	1	2	2	4	2	2	4	2	2	4	4
$r(x_3)$	0	1	2	4	2	4	2	4	4	2	4	4	2	4	4	4

Из таблицы видно что есть только две такие тройки: $R = \{0, 0, 0\}, \{1, 2, 4\}$.

3. Найдем кол-во троек (x_1, x_2, x_3), соответствующих $R = \{0, 0, 0\}$. Они могут быть трех видов:

1) $x_1 = x_2 = x_3$, таких троек (x_1, x_2, x_3) ровно 10;

2) из чисел x_1, x_2, x_3 ровно два одинаковых, таких $10 \times 9 = 90$;

3) все три числа x_1, x_2, x_3 попарно различны, таких $10 \times 9 \times 8/(3!) = 120$.

Итого $10 + 90 + 120 = 220$.

4. Найдем кол-во троек (x_1, x_2, x_3), соответствующих $R = \{1, 2, 4\}$.

Остатков 1 может быть $2 \times 10 = 20$ (по 2 в каждом из 10 циклов первой таблицы). Такое же точно количество остатков 1 и остатков 4. Таким образом, учитывая, что остатки не зависят друг от друга, получаем $(20)^3 = 8000$.

5) Всего $220 + 8000 = 8220$.

Ответ: 8220.