Минимум суммы

На олимпиаде «Надежда энергетики» по математике в 2017 году 11-классникам была предложена следующая симпатичная экстремальная задача.

Задача. (*«Надежда энергетики», 2017, 11.4*) Про положительные числа a, b, c известно, что $a^2+b^2+c^2=6abc$. Найдите наименьшее значение выражения $a+b+c$.

Авторское решение основано на манипуляциях с неравенством Коши. Ну а мы подключим к делу неравенство между средним арифметическим и средним квадратичным, и это сделает решение покороче и попроще.

Решение. Обозначим $S=a+b+c$. Согласно неравенству между средним арифметическим и средним квадратичным имеем

$$\frac{S}{3}=\frac{a+b+c}{3}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}=\sqrt{\frac{6abc}{3}}=\sqrt{2abc},$$

откуда

$$\frac{S^2}{18}\leqslant abc. \tag{1}$$

С другой стороны, из неравенства Коши получаем

$$\frac{S}{3}=\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc},$$

откуда

$$abc\leqslant\frac{S^3}{27}. \tag{2}$$

Неравенства (1) и (2) дают оценку:

$$\frac{S^2}{18}\leqslant\frac{S^3}{27},$$

то есть

$$S\geqslant\frac{3}{2}.$$

Оценка точна: равенство $S=\frac{3}{2}$ достигается при $a=b=c=\frac{1}{2}$. Легко проверить, что указанные числа удовлетворяют условию задачи (а именно, равенству $a^2+b^2+c^2=6abc$).

Ответ: $\frac{3}{2}$.

Авторское решение

Задача 4

Про положительные числа a, b, c известно, что $a^2+b^2+c^2 = 6abc$. Найдите наименьшее значение выражения $a+b+c$.

Решение.

Положим $x = 2a, y = 2b, z = 2c$. Тогда

$$\frac{x}{yz}+\frac{y}{xz}+\frac{z}{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}+\frac{c}{ab}\right) = \frac{a^2+b^2+c^2}{2abc} = 3.$$

Поэтому

$$a+b+c = \frac{1}{2}(x+y+z) = \frac{1}{2}\left(x+\frac{x}{yz}+y+\frac{y}{xz}+z+\frac{z}{xy}-3\right).$$

По неравенству Коши для среднего арифметического и среднего геометрического $x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$, $\frac{x}{yz}+\frac{y}{xz}+\frac{z}{xy} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}$, следовательно,

$$x+\frac{x}{yz}+y+\frac{y}{xz}+z+\frac{z}{xy} \geq 3\left(\sqrt[3]{xyz}+\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}\right) \geq 3\cdot 2\cdot\sqrt{\sqrt[3]{\frac{xyz}{xyz}}} = 6.$$

Тогда $a+b+c = \frac{1}{2}\left(x+\frac{x}{yz}+y+\frac{y}{xz}+z+\frac{z}{xy}-3\right) \geq \frac{1}{2}(6-3) = \frac{3}{2}$.

Неравенства Коши $x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$ и $\frac{x}{yz}+\frac{y}{xz}+\frac{z}{xy} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}$ обращаются в равенства при $x = y = z$. С учётом этого условия неравенство

$$\sqrt[3]{xyz}+\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}} \geq 2$$

обращается в равенство при $x = y = z = 1$. Таким образом, наименьшее значение выражения $a+b+c$, равное $\frac{3}{2}$, достигается при $a = b = c = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\dfrac{3}{2}$.