Неравенство на ДВИ по математике (МГУ, 2023)

Задача. (*МГУ, ДВИ, 2023.6*) Положительные числа a, b, c удовлетворяют соотношению

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=1.$$

Найти наибольшее возможное значение выражения

$$\frac{a}{2+a^2}+\frac{b}{2+b^2}+\frac{c}{2+c^2}.$$

В различных видеоразборах обсуждался метод касательных для решения данной задачи. Можно также исхитриться и решить через неравенства о средних. Ниже приводится чисто алгебраическое решение без применения спецсредств.

Решение. Перепишем условие в виде

$$\frac{3}{1+a}+\frac{3}{1+b}+\frac{3}{1+c}=3$$

и введём замену

$$x=\frac{3}{1+a},\quad y=\frac{3}{1+b},\quad z=\frac{3}{1+c}.$$

Таким образом,

$$x+y+z=3. \tag{1}$$

Имеем $a=\frac{3-x}{x}$, откуда

$$\frac{a}{2+a^2}=\frac{\frac{3-x}{x}}{2+\frac{9-6x+x^2}{x^2}}=\frac{3x-x^2}{3(x^2-2x+3)}.$$

Далее после элементарных преобразований получаем:

$$\frac{3a}{2+a^2}=\frac{3x-x^2}{x^2-2x+3}=\frac{x+3}{x^2-2x+3}-1.$$

Отсюда нужная оценка:

$$\frac{3a}{2+a^2}=\frac{x+3}{(x-1)^2+2}-1\leqslant\frac{x+3}{2}-1. \tag{2}$$

Аналогично

$$\frac{3b}{2+b^2}\leqslant\frac{y+3}{2}-1, \tag{3}$$

$$\frac{3c}{2+c^2}\leqslant\frac{z+3}{2}-1. \tag{4}$$

Складывая неравенства (2), (3) и (4), получим

$$\frac{3a}{2+a^2}+\frac{3b}{2+b^2}+\frac{3c}{2+c^2}\leqslant\left(\frac{x+3}{2}-1\right)+\left(\frac{y+3}{2}-1\right)+\left(\frac{z+3}{2}-1\right)=\frac{x+y+z}{2}+\frac{3}{2}.$$

С учётом (1) отсюда имеем

$$\frac{3a}{2+a^2}+\frac{3b}{2+b^2}+\frac{3c}{2+c^2}\leqslant\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=3,$$

и окончательно

$$\frac{a}{2+a^2}+\frac{b}{2+b^2}+\frac{c}{2+c^2}\leqslant 1.$$

Равенство достигается при $x=y=z=1$, то есть при $a=b=c=2$.