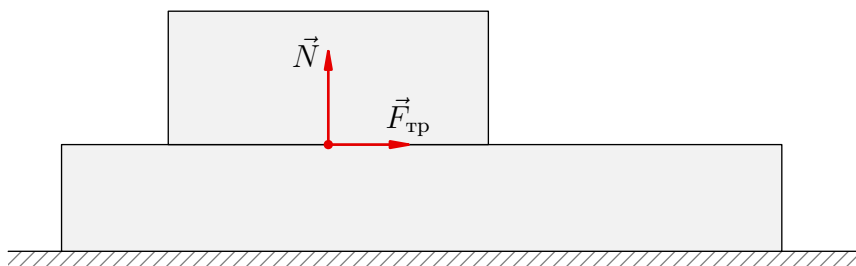


## Брусок на доске: как рисовать и решать

Задачи про движение доски и расположенного на ней бруска встречаются повсеместно: и на олимпиадах, и на ЕГЭ. В данной статье мы обсудим, как правильно делать рисунки в таких ситуациях, и подробно разберем одну несложную задачу. Искренне надеюсь, что после этой статьи ваши дела с доской и бруском пойдут гораздо лучше ;-)

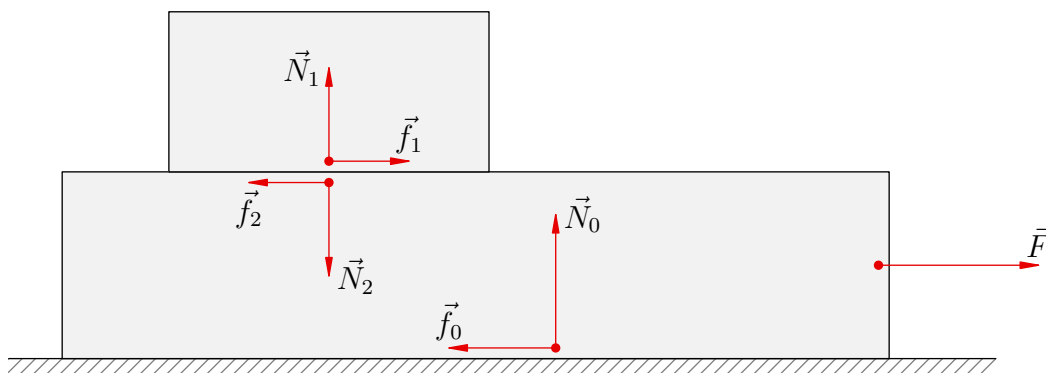
Когда школьник начинает решать любую подобную задачу (а их полным-полно), делает рисунок и расставляет силы, то почти всегда можно наблюдать одно и то же: точка приложения силы трения и силы реакции опоры находится на границе соприкасающихся поверхностей:



Это — плохая практика, ибо из такого рисунка непонятно, к какому именно телу приложена сила. К доске? К бруску? И самое скверное заключается в том, что подобный рисунок провоцирует на фатальные ошибки в записи второго закона Ньютона, которые начисто обнуляют всё последующее решение.

Итак, рисовать надо хорошо. Давайте посмотрим, как это стоит делать.

Пусть брусок лежит на доске и вся эта система движется по горизонтальной опоре под действием горизонтальной силы  $\vec{F}$ . Когда делаем рисунок, силы трения и силы реакции опоры расставляем вблизи границ трущихся поверхностей, немного смещая при этом точку приложения силы внутрь того тела, к которому сила приложена:



Здесь:

- $\vec{f}_1$  — сила трения, действующая на брусок со стороны доски; именно под действием силы  $\vec{f}_1$  брусок и движется вправо!
- $\vec{f}_2$  — сила трения, действующая на доску со стороны бруска (при этом  $\vec{f}_2 = -\vec{f}_1$  по третьему закону Ньютона);
- $\vec{N}_1$  — сила реакции доски, действующая на брусок;

- $\vec{N}_2$  — сила давления бруска на доску (при этом  $\vec{N}_2 = -\vec{N}_1$  по третьему закону Ньютона);
- $\vec{f}_0$  — сила трения, действующая на доску со стороны поверхности (если, конечно, поверхность шероховатая; в случае гладкой поверхности  $f_0 = 0$ );
- $\vec{N}_0$  — реакция опоры, действующая на доску.

Заметим, что  $\vec{f}_0$  — обязательно сила трения *скольжения* (ведь доска по условию движется!), и тогда  $f_0 = \mu_0 N_0$ , где  $\mu_0$  — коэффициент трения между доской и опорой. А вот сила  $f_1$  (и соответственно  $f_2$ ) может быть как силой трения покоя, так и силой трения скольжения. Например, если доска и брусок движутся как единое целое, то отсутствует проскальзывание бруска относительно доски и потому  $f_1$  — сила трения покоя. Если же брусок проскальзывает относительно доски, то  $f_1$  — сила трения скольжения, и тогда  $f_1 = \mu N_1$ , где  $\mu$  — коэффициент трения между доской и бруском.

Силы тяжести на рисунке не показаны, с ними обычно проблем не возникает :-)

**ЗАДАЧА.** Какую наименьшую горизонтальную силу  $F$  надо приложить к доске, чтобы брусок с нее соскользнул? Известны масса доски  $M$ , масса бруска  $m$ , а также коэффициенты трения  $\mu$  и  $\mu_0$  соответственно на границах брусок–доска и доска–опора.

**РЕШЕНИЕ.** Пусть сила  $F$  еще пока недостаточно велика для того, чтобы брусок начал проскальзывать относительно доски (но достаточна для того, чтобы система двигалась). Тогда доска и брусок движутся как единое целое с ускорением  $a$ .

Запишем второй закон Ньютона для бруска:

$$ma = f_1. \quad (1)$$

Запишем второй закон Ньютона для системы доска–брусок:

$$(M + m)a = F - f_0. \quad (2)$$

Сила  $f_0$  является силой трения скольжения, поэтому  $f_0 = \mu_0 N_0$ . А чему равна  $N_0$ ? Имеем следующие равенства:

$$\begin{aligned} N_0 &= Mg + N_2 && \text{(уравновешены силы на доску по вертикали),} \\ N_2 &= N_1 && \text{(третий закон Ньютона),} \\ N_1 &= mg && \text{(уравновешены силы на брусок по вертикали).} \end{aligned}$$

Отсюда  $N_0 = (M + m)g$ , и тогда равенство (2) принимает вид

$$(M + m)a = F - \mu_0(M + m)g. \quad (3)$$

Теперь начнем плавно увеличивать силу  $F$ , и в какой-то момент начнется проскальзывание бруска. Чем характерен этот момент? Тем, что сила  $f_1$  становится силой трения скольжения:  $f_1 = \mu N_1 = \mu mg$ . Равенство (1) тогда принимает вид

$$ma = \mu mg. \quad (4)$$

Дальше всё просто: из (4) находим  $a = \mu g$ , подставляем в (3) и выражаем отсюда искомую минимальную силу  $F$ :

$$F = (\mu + \mu_0)(M + m)g.$$

Задача решена.

## Примечание

У вас мог возникнуть вопрос: мы записали второй закон Ньютона для бруска — уравнение (1) — а как же второй закон Ньютона для доски? Ок, давайте его запишем:

$$Ma = F - f_2 - f_0. \quad (5)$$

Теперь сложим уравнения (1) и (5):

$$ta + Ma = f_1 + F - f_2 - f_0.$$

Но  $f_2 = f_1$ , поэтому получаем

$$ta + Ma = F - f_0,$$

а это в точности уравнение (2) — второй закон Ньютона для системы!

Так что имейте в виду этот момент: если два тела движутся как единое целое, то неплохо бы записать второй закон Ньютона для системы этих тел. Разумеется, учитываться теперь будут только *внешние* силы, действующие на систему — в данном случае это сила тяжести  $(M + t)g$ , реакция опоры  $N_0$  и сила трения  $f_0$  системы об опору. Ну а *внутренние* силы системы — в данном случае  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $N_1$ ,  $N_2$  — во втором законе Ньютона для системы фигурировать уже не будут.

— Ну вроде понятно! Что бы теперь порешать?

— goto → «[Брусок на доске](#)» и тренируйтесь :-)