Неравенство с «Бельчонка»-2021

Предлагаем альтернативное доказательство неравенства с олимпиады «Бельчонок» по математике (2021 год, 8 класс, последняя пятая задача варианта). Наше решение максимально использует симметрию задачи, и, кажется, оно посимпатичнее авторского ;-)

Задача. (*«Бельчонок», 2021, 8.5*) Числа a, b, c удовлетворяют условиям: $a+b+c=0$, $abc<0$. Докажите, что

$$\frac{a^2+b^2}{c}+\frac{b^2+c^2}{a}+\frac{c^2+a^2}{b}>0.$$

Решение. Имеем:

$$\frac{a^2+b^2}{c}=\frac{(a+b)^2-2ab}{c}=\frac{(-c)^2-2ab}{c}=c-\frac{2ab}{c}.$$

Аналогично

$$\frac{b^2+c^2}{a}=a-\frac{2bc}{a},\qquad \frac{c^2+a^2}{b}=b-\frac{2ca}{b}.$$

Теперь получаем:

$$\frac{a^2+b^2}{c}+\frac{b^2+c^2}{a}+\frac{c^2+a^2}{b}=\left(c-\frac{2ab}{c}\right)+\left(a-\frac{2bc}{a}\right)+\left(b-\frac{2ca}{b}\right)=$$
$$=(a+b+c)-2\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right)=-2\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right)=-2abc\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right).$$

Полученная величина положительна, поскольку $abc<0$ и сумма в скобках положительна. Неравенство доказано.

Авторское решение

5. Числа a, b, c удовлетворяют условиям: $a+b+c=0$, $abc<0$. Докажите, что

$$\frac{a^2+b^2}{c}+\frac{b^2+c^2}{a}+\frac{c^2+a^2}{b}>0.$$

Решение. Так как $abc<0$, либо одно из чисел a, b, cотрицательно, либо все три. Но $a+b+c=0$, поэтому все три числа отрицательными быть не могут. Пусть, без ограничения общности, $a>0$, $b>0$и $c<0$. Нам нужно доказать, что

$$\frac{a^2+b^2}{c}+\frac{b^2+c^2}{a}+\frac{c^2+a^2}{b}>0,$$

или

$$\frac{b^2+c^2}{a}+\frac{c^2+a^2}{b}>-\frac{a^2+b^2}{c}=\frac{a^2+b^2}{a+b}.$$

Так как $a>0$ и $b>0$, получаем, что

$$\frac{b^2+c^2}{a}>\frac{b^2}{a}>\frac{b^2}{a+b}.$$

Аналогично

$$\frac{c^2+a^2}{b}>\frac{a^2}{b}>\frac{a^2}{a+b}.$$

Складывая два полученных неравенства, получим требуемое утверждение.