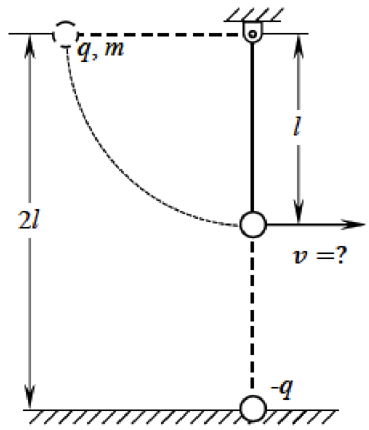
# Энергия зарядов

Если точечные заряды $q_1$ и $q_2$ находятся на расстоянии $r$ друг от друга, то потенциальная энергия их взаимодействия равна
$$W = \frac{kq_1q_2}{r}\,.$$
Потенциальная энергия системы трёх и четырёх точечных зарядов равна соответственно:
$$W = \frac{kq_1q_2}{r_{12}} + \frac{kq_1q_3}{r_{13}} + \frac{kq_2q_3}{r_{23}}\,;$$
$$W = \frac{kq_1q_2}{r_{12}} + \frac{kq_1q_3}{r_{13}} + \frac{kq_1q_4}{r_{14}} + \frac{kq_2q_3}{r_{23}} + \frac{kq_2q_4}{r_{24}} + \frac{kq_3q_4}{r_{34}}\,.$$
Здесь $r_{ij}$ — расстояние между зарядами $q_i$ и $q_j$.

Задача 1. (*МОШ, 2017, 11*) Математический маятник массой $m$ и длиной $l$, несущий заряд $q$, отклонили в горизонтальное положение и отпустили без начальной скорости. Найти скорость шарика и силу натяжения нити в момент прохождения положения равновесия. Нижний заряд $-q$, расположенный на одной вертикали с точкой подвеса, закреплён.

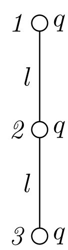



$v = \sqrt{2gl + \frac{2kq^2}{ml}\left(1 - \frac{1}{\sqrt5}\right)}$; $T = 3mg + \frac{2kq^2}{l^2}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{\sqrt5}\right)$

Задача 2. (*МФТИ, 1997*) Три маленьких одинаковых шарика, каждый массой $m$ и зарядом $q$, расположены на гладкой горизонтальной поверхности. Шарики связаны друг с другом двумя нерастяжимыми и непроводящими нитями, каждая длиной $l$ (см. рисунок). Обе нити одновременно пережигают. Пренебрегая силой тяжести, определить:

1) ускорения шариков сразу после пережигания нитей;

2) импульс каждого шарика после разлёта на большие расстояния друг от друга.

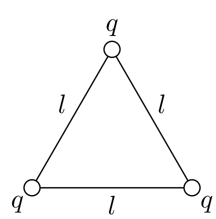



1) $a_1 = a_3 = \frac{5kq^2}{4ml^2}$, $a_2 = 0$; 2) $p_1 = p_3 = q\sqrt{\frac{5km}{2l}}$, $p_2 = 0$

Задача 3. (*МФТИ, 1997*) Три маленьких одинаковых шарика, каждый массой $m$ и зарядом $q$, расположены на гладкой горизонтальной поверхности. Шарики связаны друг с другом тремя нерастяжимыми и непроводящими нитями, каждая длиной $l$ (см. рисунок). Все три нити одновременно пережигают. Пренебрегая силой тяжести, определить:

1) ускорения шариков сразу после пережигания нитей;

2) импульс каждого шарика после разлёта на большие расстояния друг от друга.




1) $a = \frac{kq^2\sqrt3}{ml^2}$; 2) $p = q\sqrt{\frac{2km}{l}}$

Задача 4. (*«Курчатов», 2017, 11*) Три одинаковых маленьких шарика, каждый из которых имеет массу $m$ и несёт заряд $q$, удерживают в вершинах правильного треугольника с длиной стороны $a$. В некоторый момент все шарики отпускают, сообщая каждому скорость $v$, направленную к центру треугольника. Какой путь пройдёт каждый из шариков к тому моменту, когда его скорость станет равной нулю?

$\boxed{s = \frac{2\pi\varepsilon_0 m v^2 a^2}{\sqrt{3}(q^2+2\pi\varepsilon_0 m v^2 a)}}$

Задача 5. (*МФТИ, 2008*) Четыре одинаковых маленьких шарика с массой $m$ и зарядом $q$ каждый удерживают в вершинах квадрата со стороной $a$. Один шарик отпускают, продолжая удерживать остальные неподвижно. Какую скорость наберёт освобождённый шарик, удалившись на большое расстояние?

$\boxed{v = \sqrt{\frac{kq^2(4+\sqrt{2})}{ma}}}$

Задача 6. (*МФТИ, 2008*) Четыре одинаковых маленьких шарика с массой $m$ и зарядом $q$ каждый удерживают в вершинах правильного тетраэдра с ребром $a$. Один шарик отпускают, продолжая удерживать остальные неподвижно. При каком $a$ шарик наберёт на большом расстоянии скорость $v$?

$\boxed{a = \frac{3q^2}{2\pi\varepsilon_0 m v^2}}$

Задача 7. (*МФТИ, 2008*) Шарик массой $m$ с положительным зарядом $q$ находится на расстоянии $R$ от шарика массой $7m$ с отрицательным зарядом $-8q$. Неподвижные вначале шарики одновременно отпускают, и они сближаются. В некоторый момент расстояние между шариками стало $R/8$. Найдите в этот момент:

1) отношение скорости первого шарика к скорости второго;
2) скорость шарика массой $m$.

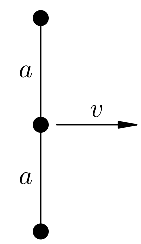
Размеры шариков малы по сравнению с $R$. Силы гравитации не учитывать.

$\boxed{1)\ 7;\ 2)\ v = \frac{7q}{\sqrt{2\pi\varepsilon_0 m R}}}$

Задача 8. (*МФТИ, 1992*) Три одинаковых одноимённо заряженных шарика, каждый с зарядом $q$ и массой $m$, попарно связаны нерастяжимыми нитями, каждая длиной $a$. Все три шарика неподвижны и расположены на гладкой горизонтальной поверхности. Одна из нитей пережигается. Какие скорости будут иметь шарики в тот момент, когда они будут располагаться на одной прямой? Радиус шарика мал по сравнению с длиной нити.

Скорость крайних шариков $v = \frac{q}{2\sqrt{6\pi\varepsilon_0 m a}}$, скорость среднего $2v$

Задача 9. (*МФТИ, 1992*) Три одинаковых одноимённо заряженных шарика, каждый зарядом $q$ и массой $m$, связаны нерастяжимыми нитями, каждая длиной $a$. Все три шарика неподвижны и расположены на гладкой горизонтальной поверхности (см. рисунок). Какую минимальную скорость $v$ необходимо сообщить центральному шарику, чтобы при дальнейшем движении шарики смогли образовать равносторонний треугольник? Радиус шариков мал по сравнению с длиной нити.




$\boxed{v = q\sqrt{\frac{3k}{2ma}}}$

Задача 10. (*«Физтех», 2015, 10*) В вершинах равнобедренного треугольника со сторонами $a$, $5a$, $5a$ находятся неподвижно три небольших по размерам положительно заряженных шарика, связанных попарно тремя лёгкими непроводящими нитями. Каждый из шариков, связанных короткой нитью, имеет массу $m$ и заряд $q$. Третий шарик имеет массу $2m$ и заряд $5q$. Короткую нить пережигают, и шарики начинают двигаться. В момент, когда шарики оказались на одной прямой, скорость шариков массой $m$ оказалась равной $v$.

1) Найдите в этот момент скорость шарика массой $2m$.

2) Найдите $q$, считая известными $m$, $v$, $a$.

1) $u = v$; 2) $q = \frac{2v}{3}\sqrt{\frac{5ma}{k}}$

Задача 11. (*«Физтех», 2015, 10*) В вершинах равнобедренного треугольника со сторонами $2a$, $2a$, $3a$ находятся неподвижно три небольших по размерам положительно заряженных шарика, связанных попарно тремя лёгкими непроводящими нитями. Каждый из шариков, связанных длинной нитью, имеет массу $m$ и заряд $q$. Третий шарик имеет массу $6m$ и заряд $6q$. Две нити одинаковой длины одновременно пережигают, и шарики разлетаются. В момент, когда шарики оказались в вершинах равнобедренного треугольника со сторонами $4a$, $4a$, $3a$, скорость шарика массой $6m$ оказалась равной $v$.

1) Найдите в этот момент скорость связанных шариков.

2) Найдите $q$, считая известными $m$, $v$, $a$.

1) $u = 3v$; 2) $q = 2v\sqrt{\frac{ma}{k}}$

Задача 12. (*Всеросс., 2003, ОЭ, 10*) В трёх вершинах правильного тетраэдра с длиной ребра $a$ удерживают три маленьких шарика, каждый из которых имеет массу $M$ и заряд $Q$. В четвёртой вершине удерживают ещё один маленький шарик массой $m$ и зарядом $q$. Известно, что $m \ll M$, а $Q = 2q$. Все шарики одновременно освобождают.

1) Найдите абсолютные величины скоростей шариков после их разлёта (удаления друг от друга на бесконечно большие расстояния).

2) Под какими углами к грани тетраэдра, содержавшей три тяжёлых шарика, они будут двигаться после разлёта?

$v = \sqrt{\frac{6kQ^2}{ma}}$; $V = \sqrt{\frac{2kQ^2}{Ma}}$; $\alpha = \sqrt{\frac{m}{6M}}$

Задача 13. (*Всеросс., 2004, ОЭ, 10*) Два маленьких шарика диаметром $d$, массой $m$ и зарядами $+Q$ и $-Q$ движутся в пространстве, взаимодействуя только между собой. В некоторый момент они оказались на расстоянии $L_0$ друг от друга, причём первый из них был неподвижен, а скорость второго $v_0$ была направлена в сторону первого. Найдите максимальное расстояние $L$ разлёта шариков после абсолютно упругого удара (общая кинетическая энергия шариков непосредственно перед и сразу после удара одинакова). За время удара заряды шариков изменились и стали равными $+q$ и $-q$. Считайте, что в каждый момент времени заряд шарика распределён по его объёму равномерно.

$L = \left(\frac{1}{d} - \frac{Q^2}{q^2}\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{L_0}\right) - \frac{mv_0^2}{4kq^2}\right)^{-1}$ или $L = \infty$

Задача 14. (*МОШ, 2016, 11*) Три маленьких шарика находятся в космосе в углах правильного треугольника со сторонами длиной $R$. Шарики имеют массы $m$, $100m$, $100m$. Их электрические заряды равны соответственно $100q$, $q$, $q$. В начальный момент скорости шариков равны нулю. Какими будут скорости этих шариков через очень большое время?

$\boxed{v_1 = \frac{10q}{\sqrt{\pi\varepsilon_0 mR}},\ v_2 = \frac{q}{20\sqrt{\pi\varepsilon_0 mR}}}$

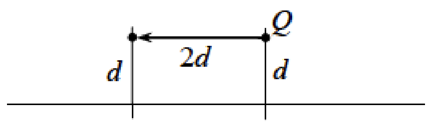
Задача 15. (*МФТИ, 1995*) В закреплённой тонкостенной непроводящей равномерно заряженной сфере радиуса $R$ имеются два небольших диаметрально противоположных отверстия. Заряд сферы $Q$. По прямой, проходящей через отверстия, из бесконечности движется частица, имеющая на бесконечности скорость $v_0$. Масса частицы $m$, её заряд равен $q$ и противоположен заряду сферы. Найдите время, в течение которого частица будет находиться внутри сферы.

$\boxed{\tau = \frac{2R}{\sqrt{v_0^2 - \frac{2kQq}{mR}}}}$

Задача 16. (*«Росатом», 2012, 11*) Две закреплённые концентрические сферы радиусов $R$ и $2R$ заряжены зарядами $-Q$ и $2Q$ соответственно (см. рисунок). В большой сфере сделано маленькое отверстие. На расстоянии $3R$ от центра сфер напротив отверстия удерживают точечный заряд $-Q$, имеющий массу $m$. Заряд $-Q$ отпускают. Долетит ли этот заряд до меньшей сферы и если да, то какую скорость будет иметь около неё? А если нет, то на каком расстоянии от центра он остановится?


$\boxed{\text{Не долетит; } x = \frac{3}{2}R}$

Задача 17. (*«Росатом», 2017, 11*) Точечный заряд $Q$ находится на расстоянии $d$ от очень большой проводящей плоскости. В некоторый момент времени заряд перемещают на расстояние $2d$ вдоль плоскости (см. рисунок), причём так быстро, что за время перемещения заряда $Q$ заряды на плоскости не успели сместиться от своих первоначальных положений. Какое количество теплоты выделится в веществе плоскости в процессе установления равновесия?




$\boxed{W = \frac{2-\sqrt{2}}{4}\frac{kQ^2}{d}}$

Задача 18. (*МФТИ, 2007*) Бусинка массой $m$ с положительным зарядом $q$ может двигаться без трения вдоль натянутой диэлектрической нити, совпадающей с осью кольца радиусом $R$. Кольцо с равномерно распределённым по нему зарядом $-6q$ закреплено. Вначале бусинку удерживали на расстоянии $3R/4$ от центра кольца, затем отпустили. Найдите скорость бусинки при прохождении центра кольца.

$\boxed{v = \sqrt{\frac{3q^2}{5\pi\varepsilon_0 mR}}}$

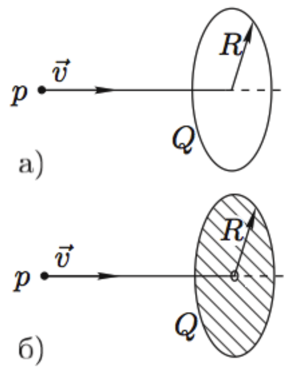
Задача 19. (*МФТИ, 2007*) Кольцо радиусом $R$ с равномерно распределённым по нему зарядом закреплено. На оси кольца на расстоянии $3R/4$ от его центра удерживают небольшой по размерам шарик массой $m$ и отрицательным зарядом $q$. Заряд кольца равен $3q$. Шарик отпускают, и он движется вдоль оси кольца. Найдите скорость шарика на расстоянии $4R/3$ от центра кольца.

$v = \sqrt{\frac{3q^2}{10\pi\varepsilon_0 mR}}$

Задача 20. (*Всеросс., 2008, финал, 10*) 1) Тонкое кольцо радиусом $R = 5$ см однородно заряжено зарядом $Q = +10^{-8}$ Кл (рис. *а*). Какую минимальную скорость $v_{\min}$ нужно сообщить протону, находящемуся вдали от кольца, чтобы он пролетел по оси кольца через его центр?

2) Пусть теперь заряд $Q = +10^{-8}$ Кл равномерно распределён по поверхности тонкого диска радиуса $R = 5$ см (рис. *б*). В центре диска имеется небольшое отверстие. Какую минимальную скорость нужно сообщить протону в этом случае, чтобы он пролетел через отверстие в диске?

Элементарный заряд $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ Кл, масса протона $m_p = 1{,}672 \cdot 10^{-27}$ кг, электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

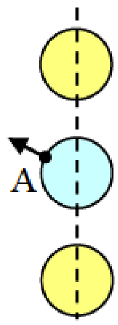



1) $v_{\min} = \sqrt{\frac{eQ}{2\pi\varepsilon_0 m_p R}} = 5{,}9 \cdot 10^5$ м/с; 2) $v'_{\min} = v_{\min}\sqrt{2}$

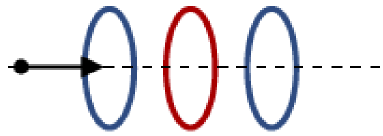
Задача 21. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11*) На проводящий шар радиуса $R$ нанесён заряд $q$. Шар закреплен неподвижно. В точках $A$ и $B$, лежащих по разные стороны от шара на прямой, проходящей через его центр $O$ ($OA = 3R$, $OB = 4R$), закреплены небольшие тела с зарядами $4q$ и $3q$ соответственно. С поверхности шара со скоростью $v_0 = \sqrt{\frac{13kqe}{18mR}}$ вылетает электрон ($e/m$ — величина удельного заряда электрона). Пренебрегая излучением, найти, во сколько раз возрастёт скорость электрона после удаления на большое расстояние от этой системы зарядов.

$\frac{v}{v_0} = \frac{1}{v_0}\sqrt{\frac{26kqe}{9mR}} = 2$

Задача 22. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11*) Три шара радиуса $a = 40$ см расположены так, что их центры находятся на одной прямой на расстоянии $3a = 120$ см друг от друга. Крайние шары — непроводящие, и по поверхности каждого из них равномерно распределён заряд $q = 1$ мкКл. Средний шар — проводящий, и его заряд равен $-2q = -2$ мкКл. От точки $A$ на поверхности среднего шара оторвался без начальной скорости ион с удельным зарядом $\beta = 2{,}5 \cdot 10^6$ Кл/кг и удалился на большое расстояние от шаров. До какой скорости он при этом разогнался? Излучением пренебречь. Константа в законе Кулона $k = 9 \cdot 10^9$ Н · м$^2$/Кл$^2$.




$v = \sqrt{\frac{8kq\beta}{3a}} \approx 387$ км/с



Задача 23. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11*) Три одинаковых непроводящих кольца радиуса $a$ расположены так, что их оси совпадают, на одинаковом расстоянии, равном также $a$. На кольца нанесён равномерно распределённый заряд: $-Q$ — на крайние, и $+2Q$ — на среднее. С какой скоростью нужно запустить вдоль оси колец с расстояния $a$ от плоскости крайнего кольца маленький шарик с зарядом $+q$ ($q \ll Q$) и массой $m$, чтобы он пролетел все три кольца «насквозь»? Электрическая постоянная равна $\varepsilon_0$.

$$\boxed{v_0 > \sqrt{\frac{2kqQ}{ma}\,\frac{(\sqrt{5}-1)(2\sqrt{2}-1)}{\sqrt{10}}}}$$

Задача 24. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11*) Два одинаковых тела массой $m$ и с зарядом $q$ каждое удерживают на горизонтальной плоскости на расстоянии $d$. Какое расстояние $l$ пройдет каждое из тел, если их отпустить? Какую максимальную скорость $u$ приобретут тела в процессе движения? Коэффициент трения тел о плоскость равен $\mu$. Электрическая постоянная равна $\varepsilon_0$.

$$\boxed{l = \frac{kq^2}{2\mu mgd} - \frac{d}{2},\ u = \sqrt{\frac{kq^2}{md} - 2\sqrt{\frac{kq^2\mu g}{m}} + \mu g d}\ \text{при}\ \mu < \frac{kq^2}{mgd^2}\ \text{(иначе тела покоятся)}}$$

Задача 25. (*«Курчатов», 2016, 11*) Плоский воздушный конденсатор обладает одинаковыми круглыми обкладками радиусом $R$. По обкладкам распределены заряды $+Q$ и $-Q$, а расстояние между обкладками равно $d$ ($d \ll R$). На оси симметрии конденсатора между пластинами на расстоянии $x$ от обкладки с зарядом $+Q$ находится частица с зарядом $q$ ($|q| \ll |Q|$). Найдите потенциальную энергию взаимодействия этой частицы с конденсатором, считая, что потенциальная энергия равна нулю тогда, когда частица находится на бесконечно большом расстоянии от конденсатора.

$$\boxed{W = \frac{qQ}{\varepsilon_0 \pi R^2}\left(\frac{d}{2} - x\right)}$$

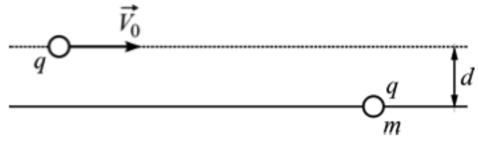
Задача 26. (*МОШ, 2016, 10*) Две покоящиеся в космосе вдали от других тел материальные точки, имеющие одинаковые массы $m$ и электрические заряды $q$, скреплены невесомой, нерастяжимой и не проводящей электрический ток прочной гибкой нитью длиной $L$. Незаряженное тело малых размеров массой $2m$ движется поступательно в направлении средней точки нити со скоростью $V$, направленной перпендикулярно нити. При соприкосновении тела и нити они друг относительно друга не проскальзывают, но и не прилипают друг к другу.

1) Какими будут модули скоростей материальных точек и тела через очень большое время?

2) На каком минимальном расстоянии $L_{\min}$ друг от друга будут находиться материальные точки в процессе движения?

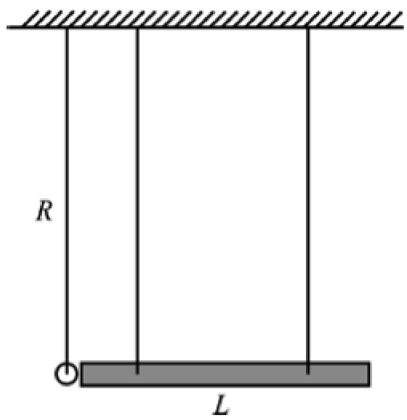
$$\boxed{1)\ v_m = V,\ v_{2m} = 0;\ 2)\ L_{\min} = \left(\frac{1}{L} + \frac{mV^2}{2kq^2}\right)^{-1}}$$

Задача 27. (*МОШ, 2012, 10*) По длинному непроводящему стержню может без трения перемещаться бусинка массой $m$ и зарядом $q$. Вдоль стержня на расстоянии $d$ от него перемещают с постоянной скоростью $v_0$ точечный заряд $q$. Считая, что в начальный момент бусинка покоилась и была бесконечно удалена от точечного заряда, определите максимальную скорость $v_{\max}$ бусинки. Постройте график зависимости $v_{\max}$ от $v_0$.




$v_{\max} = \begin{cases} 2v_0, & \text{если } v_0 < u, \\ v_0 - \sqrt{v_0^2 - u^2}, & \text{если } v_0 > u, \end{cases}$ где $u = \sqrt{\frac{2kq^2}{md}}$

Задача 28. (*МОШ, 2011, 10*) Маленький шарик и тонкий непроводящий стержень длиной $L$, массы которых $m$ одинаковы, подвешены к потолку на нитях одинаковой большой длины $R \gg L$ (см. рисунок). Нити позволяют шарику и стержню двигаться только в одной вертикальной плоскости. Сначала шарик и стержень не были заряжены и висели так, что почти соприкасались друг с другом, причем шарик находился возле одного из концов стержня. Шарику и стержню сообщили одинаковые электрические заряды $Q$, причем заряд на стержне распределили равномерно по его длине. На каком расстоянии $x$ окажутся в положении равновесия шарик и тот конец стержня, возле которого шарик сначала находился? Считайте, что диаметр шарика много меньше $x$, а $x$ много меньше длины стержня.




$x \approx Q\sqrt{\frac{2kR}{mgL}}$

Задача 29. (*МОШ, 2011, 11*) Тонкий жёсткий непроводящий стержень длиной $L$ несёт на себе электрический заряд $Q$, который равномерно распределён по длине стержня. Маленький шарик имеет электрический заряд $q$ и прикреплён к одному из концов стержня тонкой непроводящей и незаряженной нитью длиной $R$. Какова сила натяжения нити, если система находится в равновесии? Считать, что $Q/q > 0$. Силу тяжести не учитывать.

$T = \frac{kQq}{R(R+L)}$

Задача 30. (*«Росатом», 2011, 11*) Если равномерно заряженный шар разрезать пополам и отпустить половинки, то после разлёта на бесконечно большое расстояние они будут иметь скорость $v_1$. Если взять половину того же шара, разрезать пополам и отпустить половинки, то после разлёта на бесконечно большое расстояние они будут иметь скорость $v_2$. Берут первоначальный шар, вырезают из него четвёртую часть и отпускают получившиеся части. Какую скорость будет иметь на бесконечно большом расстоянии меньшая часть? Считать, что при разлёте части шара движутся поступательно (без вращения).

$u = \frac{\sqrt{6}}{4}(2v_1 - v_2)$

Задача 31. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 10–11*) Три маленьких одинаковых заряженных шайбы соединены попарно двумя лёгкими нерастяжимыми нитями длиной $l_0 = 40$ см и одной упругой резинкой, длина которой в недеформированном состоянии также равна $l_0$ (сила упругости резинки пропорциональна деформации). Если поместить их на гладкую горизонтальную поверхность, то в состоянии покоя длина резинки будет равна $l = 50$ см. Удерживая шайбы, резинку переводят в недеформированное состояние (так, что шайбы образуют равносторонний треугольник) и отпускают шайбы без начальной скорости. До какой максимальной длины растянется резинка в ходе дальнейшего движения? Какой будет максимальная скорость «средней» шайбы? Циклическая частота колебаний одной шайбы на резинке равна $\omega = 20$ с$^{-1}$.


$l_{max} = \frac{l_0}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{8l^2(l-l_0)}{l_0^3}}\right) \approx 60{,}6$ см;

$v_{max} \approx \frac{5\omega l_0}{4\sqrt{142}} \approx 0{,}84$ м/с как максимум функции $v(x) = \frac{\omega l_0}{4}\sqrt{\frac{x(2x-1)(25+64x-128x^2)}{6(3-2x^2)}}$

Задача 32. (*МОШ, 2006, 11*) Закреплённая непроводящая тонкостенная однородная сфера радиусом $R$ и массой $M$ равномерно заряжена по поверхности зарядом $Q$. Из неё вырезают маленький кусочек массой $M/10000$, сжимают его в крошечный комочек (не меняя заряд) и помещают в центр сферы. Комочек отпускают. Чему будет равна его скорость на большом удалении от сферы? А в момент вылета из сферы? Сила тяжести отсутствует.

$v_\infty = \frac{Q}{\sqrt{2\pi\varepsilon_0 MR}}$; $v_{выл} = v_\infty/10$

Задача 33. (*МОШ, 2009, 11*) Из тонкой жёсткой проволоки изготовили кольцо радиусом $R$, которое закрепили так, чтобы его плоскость была горизонтальна. На кольцо нанесли заряд $Q$. На оси кольца на высоте $h$ над ним удерживают маленький шарик массой $m$, имеющий одноимённый с кольцом заряд $q$. Какую по модулю скорость надо сообщить шарику, толкнув его вверх, чтобы он, двигаясь по вертикали, пролетел в дальнейшем сквозь кольцо?

См. конец листка

**Ответ к задаче 33**

Используются обозначения:

$x_1$ — наименьший корень уравнения

$$\frac{\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}{x}=\frac{kQq}{mg}\,;$$

$x_2$ — наибольший корень уравнения

$$x+\frac{kQq}{mg\sqrt{R^2+x^2}}=\frac{R^2+2x_1^2}{x_1}\,.$$

Если $\dfrac{kQq}{mgR^2}\leqslant\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ или $h\notin[x_1;x_2]$, то $v_{\min}=0$. Если же $\dfrac{kQq}{mgR^2}>\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ и $h\in[x_1;x_2]$, то

$$v_{\min}=\sqrt{2g(x_1-h)+\frac{2kQq}{m}\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+x_1^2}}-\frac{1}{\sqrt{R^2+h^2}}\right)}\,.$$